Índice: Cálculo de límites en el infinito. Expresión indeterminada $\infty-\infty$. Expresión indeterminada ∞/∞. Expresión indeterminada $0\cdot\infty$. Expresión indeterminada $1^{\pm\infty}$. Límites de sucesiones. Cálculo de límites en $-\infty$. Problemas.

1.- Cálculo de límites en el infinito

El cálculo de límites en el infinito se reduce a aplicar sistemáticamente las reglas enunciadas en el apartado 1 de la lección anterior, así como la tabla de los límites. Además se utilizan dos resultados ya vistos (problemas 2 y 3 de la lección 2):

1º) El límite de la función $f(x)=k$, tanto en $-\infty$ como en $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} k=k \qquad \lim_{x\to+\infty} k=k$$

2º) El límite de la función $f(x)=x$, tanto en $-\infty$ como en $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} x=-\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

Veamos como ejemplo el límite de la función polinómica $f(x)=3x^2-8$ en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(3x^2-8) \overset{1}{=} \lim_{x\to+\infty}(3x^2)-\lim_{x\to+\infty}8 \overset{2}{=} 3\cdot\lim_{x\to+\infty}x^2-\lim_{x\to+\infty}8 \overset{3}{=}$$

$$= 3\cdot(\lim_{x\to+\infty}x)^2-\lim_{x\to+\infty}8 \overset{4}{=} 3\cdot(+\infty)^2-8$$

Como se ve, todos estos pasos se reducen a sustituir x por $+\infty$, lo que se conoce con el nombre de *dar el paso al límite*. Eso es lo que haremos de ahora en adelante:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(3x^2-8) \overset{5}{=} 3\cdot(+\infty)^2-8 \overset{6}{=} 3\cdot(+\infty)-8 \overset{6}{=} +\infty-8 \overset{6}{=} +\infty$$

En este caso se trata de un límite determinado. Si fuese indeterminado, esto es, si al dar el paso al límite aparece una expresión indeterminada, hay que operar adecuadamente para convertirlo en determinado. Las operaciones que se hacen dependen del tipo de indeterminación que aparezca. Es lo que veremos en los siguientes apartados.

---

[1] El límite de una resta es la resta de los límites (primera regla de las operaciones con límites).
[2] El límite del producto de un número por una función es el producto del número por el límite de la función (segunda regla de las operaciones con límites).
[3] El límite de un producto ($x^2=x\cdot x$) es el producto de los límites (tercera regla de las operaciones con límites).
[4] Por los resultados mencionados más arriba (los problemas 2 y 3 de la lección 2).
[5] Damos el paso al límite.
[6] Aplicamos la tabla de límites.

2.- Expresión indeterminada ∞-∞

Las funciones más sencillas en las que puede aparecer esta expresión indeterminada son las funciones polinómicas:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) \overset{1}{=} (+\infty)^2-(+\infty) \overset{2}{=} \infty-\infty$$

A diferencia de lo que nos ocurría en el ejemplo anterior, aquí aparece una expresión indeterminada. Para eliminarla, se saca factor común[3] la máxima potencia de x:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\right] \overset{1}{=} (+\infty)^2\cdot\left(1-\frac{1}{+\infty}\right) \overset{2}{=} +\infty\cdot(1-0) \overset{2}{=} +\infty\cdot 1 \overset{2}{=} +\infty$$

Observa que este método funciona incluso en aquellos casos en los que no necesita ser aplicado:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-8) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(3-\frac{8}{x^2}\right)\right] \overset{1}{=} (+\infty)^2\cdot\left(3-\frac{8}{+\infty}\right) \overset{2}{=} +\infty\cdot(3-0) \overset{2}{=} +\infty\cdot 3 \overset{2}{=} +\infty$$

Por tanto, lo utilizaremos siempre que tengamos que calcular el límite en el infinito de un polinomio, sin esperar a ver si sale o no la indeterminación ∞-∞.

3.- Expresión indeterminada ∞/∞

Las funciones más sencillas en las que puede aparecer esta expresión indeterminada son las funciones racionales (cocientes de polinomios):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x}{x+8} \overset{4}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\cdot\left(1+\frac{8}{x}\right)} \overset{5}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{8}{x}} \overset{1}{=}$$

$$= \frac{(+\infty)^2\cdot\left(1-\frac{1}{(+\infty)^2}\right)}{1+\frac{8}{+\infty}} \overset{2}{=} \frac{+\infty\cdot[1-0]}{1+0} \overset{2}{=} +\infty$$

Por tanto, la expresión indeterminada ∞/∞ se elimina sacando factor común la máxima potencia de x en el numerador y en el denominador, y simplificando a continuación.

---

[1] Damos el paso al límite.
[2] Aplicamos la tabla de límites.
[3] Recuerda lo dicho en el apartado 4 de la lección anterior.
[4] Procedemos con cada polinomio como hemos indicado antes.
[5] Si diésemos aquí el paso al límite, aparecería la indeterminación ∞/∞. Antes de darlo, simplificamos numerador y denominador.

4.- Expresión indeterminada $0\cdot\infty$

La expresión indeterminada $0\cdot\infty$ suele aparecer en algunas restas de raíces. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2-x}-2x\right] \overset{1}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2\cdot\left(4-\frac{1}{x}\right)}-2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\sqrt{4-\frac{1}{x}}-2x\right] \overset{2}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}-2\right)\right] \overset{3}{=} +\infty\cdot\left(\sqrt{4-\frac{1}{+\infty}}-2\right) \overset{4}{=} +\infty\cdot\left(\sqrt{4-0}-2\right) \overset{4}{=} +\infty\cdot 0$$

La expresión indeterminada $0\cdot\infty$ se elimina multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada (A+B y A-B son expresiones conjugadas):

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)\cdot\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-x}+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-x-4x^2}{\sqrt{4x^2-x}+2x} \overset{5}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\cdot\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2\right)} \overset{6}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2} \overset{3}{=} \frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{+\infty}}+2} \overset{4}{=} -1/4$$

No siempre que estamos ante una resta de raíces aparece la indeterminación $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2-x}-x\right] \overset{5}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}-1\right)\right] \overset{3}{=} \left[+\infty\cdot\left(\sqrt{4-\frac{1}{+\infty}}-1\right)\right] \overset{4}{=}$$

$$= +\infty\cdot\left(\sqrt{4}-1\right) \overset{4}{=} +\infty$$

Es fácil distinguir ambos casos. La indeterminación $0\cdot\infty$ aparece cuando el “grado” y el “coeficiente principal” (coeficiente de mayor grado) de minuendo y sustraendo coinciden. Observa que en ambos ejemplos hay coincidencia de “grados”[7], pero en el segundo ejemplo el “coeficiente principal” del minuendo[8] es 2, mientras que el del sustraendo es 1.

De todos modos, en ambos casos puede aplicarse el procedimiento de multiplicar y dividir por el conjugado. Aunque, como hemos visto con el segundo ejemplo, se ahorra tiempo procediendo directamente.

---

[1] Procedemos con cada polinomio como hemos indicado antes.
[2] Si diésemos aquí el paso al límite, aparecería la indeterminación $\infty-\infty$. Por tanto, sacamos factor común la máxima potencia de x.
[3] Damos el paso al límite.
[4] Aplicamos la tabla de límites.
[5] Sacamos factor común la máxima potencia de x. Nos hemos saltado el paso previo de hacerlo primero en el radicando.
[6] Si diésemos aquí el paso al límite, aparecería la indeterminación ∞/∞. Antes de darlo, simplificamos numerador y denominador.
[7] Al ser el minuendo la raíz cuadrada de un polinomio de segundo grado, su “grado” es 1.
[8] Ya que $\sqrt{4}=2$.

5.- Expresión indeterminada $1^{\pm\infty}$

Evidentemente, esta indeterminación solo puede aparecer al calcular el límite de una potencia.

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x \overset{1}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x}\right]^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x \overset{2}{=} \left(1-\frac{1}{+\infty}\right)^{+\infty} \overset{3}{=} 1^{+\infty}$$

La expresión indeterminada $1^{\pm\infty}$ se elimina aplicando la regla[4] siguiente, que no vamos a demostrar. Esta regla solo se puede aplicar cuando aparezca dicha indeterminación:

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$, entonces[5]:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot(f(x)-1)]}$$

Apliquémosla al ejercicio anterior:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\frac{x-1}{x}-1\right)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1-x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)} = e^{-1}$$

6.- Límites de sucesiones

Como las sucesiones son funciones de dominio N*=N-{0}, sus límites en $+\infty$, que son los únicos que tiene sentido plantear, se calculan igual que los límites de las funciones. La única diferencia es que la variable es n en lugar de x.

Por ejemplo[6]:

$$\lim\left(\frac{1}{1+2n}\right)^{\frac{1+2n}{n}} \overset{7}{=} \lim\left(\frac{1}{1+2n}\right)^{\frac{1}{n}+2} \overset{2}{=} \left(\frac{1}{1+\infty}\right)^{\frac{1}{+\infty}+2} \overset{3}{=} \left(\frac{1}{+\infty}\right)^{0+2} \overset{3}{=} 0^2 \overset{3}{=} 0$$

Como hemos indicado antes, la regla del apartado anterior solo puede aplicarse cuando aparece la indeterminación $1^{\pm\infty}$. Observa qué

1 Procedemos con cada polinomio como hemos indicado antes.
2 Damos el paso al límite.
3 Aplicamos la tabla de límites.
4 Aunque en esta lección estamos calculando límites en el infinito y, por tanto, x_0 es aquí $+\infty$ o $-\infty$, esta regla también vale cuando x_0 es un número real o cuando se trata de límites laterales. Por eso la hemos enunciado en general.
5 Observa que con esta regla transformamos la indeterminación $1^{\pm\infty}$ en $0\cdot\infty$.
6 Como el único límite que tiene sentido con sucesiones es el límite en $+\infty$, no se suele poner debajo de lím la expresión $n\to+\infty$.
7 En lugar de sacar la máxima potencia de n en los polinomios del exponente para deshacer la indeterminación ∞/∞, hemos hecho la división. En la base de la potencia no aparece ninguna indeterminación, por lo que puede dejarse como está.

hubiera pasado si en este ejercicio hubiésemos aplicado (erróneamente) dicha regla:

$$\text{lím}\left(\frac{1}{1+2n}\right)^{\frac{1+2n}{n}} = e^{\text{lím}\left[\frac{1+2n}{n}\cdot\left(\frac{1}{1+2n}-1\right)\right]} = e^{\text{lím}\left[\frac{1+2n}{n}\cdot\left(\frac{1-1-2n}{1+2n}\right)\right]} =$$

$$= e^{\text{lím}(-2)} = e^{-2}$$

7.- Cálculo de límites en $-\infty$

En $-\infty$ se hace igual que en $+\infty$, solo que en el paso al límite se sustituye x por $-\infty$.

Cuando se trata de funciones con raíces de índice par hay que tener especial cuidado a la hora de meter factores o divisores dentro del signo radical (o de sacarlos):

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \overset{1}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{x} \overset{2}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) \overset{3}{=} -\sqrt{1-\frac{1}{(-\infty)^2}} \overset{4}{=} -1$$

No obstante, como f(x) y f(-x) son funciones simétricas respecto del eje de ordenadas, se puede aplicar, como vimos en la lección 2, la fórmula:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

Veámoslo con el ejercicio anterior:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(-x)^2-1}}{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{-x} \overset{1}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{-x} \overset{5}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) \overset{3}{=} -\sqrt{1-\frac{1}{(+\infty)^2}} \overset{4}{=} -1$$

[1] Procedemos con cada polinomio como hemos indicado antes.
[2] Recuerda que $\sqrt{x^2}=|x|$, y que $|x|=-x$ cuando $x<0$.
[3] Damos el paso al límite.
[4] Aplicamos la tabla de límites.
[5] Ya nos hemos encontrado en esta misma situación en algún problema de esta lección. Aunque no reparamos en ello, conviene hacerlo de ahora en adelante: como $x>0$, $|x|=x$.

8.- Problemas

1) Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-3x^3+x^2+7x)$

b) $\lim \dfrac{n^2}{n^3-n^2-n+1}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^4-1}{x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}[3^x-4^x]$

f) $\lim\left(\dfrac{2n^2+4}{5n^2}\right)^{n^2}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x^2+3x-2})$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{6x^3-3x}{5x^3}\right)^{x^3}$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x-3\cdot 5^x}{2^x-5^x}$

k) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x-25}$

l) $\lim\dfrac{\sqrt{n^3+5}+\sqrt{9n^3-3n}}{\sqrt{4n^3-5n^2}}$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty}[\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})]$

n) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+2}}$

ñ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4-2x^2}+\sqrt[4]{x^3+3x}}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt[5]{x^3-5}}$

o) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt[4]{x^5+1}}}{\sqrt[5]{x^9}}$

p) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2-2^x)$

q) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$

2) Halla:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^3}}$

b) $\lim\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}[\sqrt{4x^2-1}-2x+1]$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^{3x+7}}{3^{x-1}}$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}[3^{-x}-2^{-x}]$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x-1}$

g) $\lim(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2+8n})$

h) $\lim\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3+3n-2}$

i) $\lim\dfrac{2^n+3^n}{4^n}$

j) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+\operatorname{sen} x)$

k) $\lim\limits_{x\to -\infty}(3^x/2^x)$

l) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x-\sqrt{x^2+1}}{2x+5}$

m) $\lim\dfrac{n^3-2}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$

n) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

ñ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x^2+8}{3x^2-4}\right)^{4x^2}$

o) $\lim\limits_{x\to +\infty}[e^x\cdot(2+\operatorname{sen} x)]$

p) $\lim\limits_{x\to +\infty}[1+2^{1/x}]^{-x}$

q) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{4x^3-2}{4x^3+6}\right)^{\frac{3x^2-5}{x+2}}$

3) Calcula el valor de m para que se verifique la igualdad:

$$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2m}{x-m}\right)^x=5$$