Índice: Límite de la composición de funciones. Cálculo de límites por cambio de variable. Problemas.

1.- Límite de la composición de funciones

Recordemos que la función g∘f (*f compuesta con g*) se define como sigue:

$$g\circ f \equiv \begin{cases} g\circ f(x)=g(f(x)) \\ \mathrm{Dom}(g\circ f)=\{x\in \mathrm{Dom}(f)\,|\,f(x)\in \mathrm{Dom}(g)\} \end{cases}$$

* * *

Para calcular el límite de la composición de dos funciones nos atendremos a la siguiente regla[1], que no demostraremos:

Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0$, se puede dar el siguiente paso (que consiste en hacer el cambio de variable f(x)=y):

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=\lim_{y\to y_0} g(y)$$

Para poder aplicar esta regla se tiene que verificar una de las tres condiciones siguientes:

1ª) y_0 es $+\infty$ o $-\infty$.

2ª) g es continua[2] en y_0.

3ª) $f(x)\neq y_0$ en un entorno reducido[3] de x_0.

NOTA: Si se cumple la segunda condición, esto es, si g es continua en y_0, la fórmula anterior puede, evidentemente, escribirse así:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(y_0) \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to x_0} g(f(x))=g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$$

Por ejemplo, calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

Observa que en este caso $x_0=1$, $g=\operatorname{arc\,tg}$ y $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.

El procedimiento que se sigue es el siguiente:

1º) Calculamos y_0:

$$y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \overset{4}{=} \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}}{(x-1)\cdot\sqrt{x-1}} =$$

[1] Regla que es cierta tanto si x_0 es un número real como si es $+\infty$ o $-\infty$, y que también se cumple cuando se trata de límites laterales.

[2] Recuerda la definición de función continua en un punto vista el curso pasado.

[3] Un entorno reducido es un entorno sin el centro. Esta condición se refiere solo a valores de x que pertenecen al dominio de la función g∘f.

[4] Ya que el dominio de la función es $(1,+\infty)$.

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x-1}{(x-1)\cdot\sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{0^+}} = +\infty$$

2º) Como se cumple la primera condición, aplicamos la regla, esto es, hacemos el cambio de variable f(x)=y:

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{y\to +\infty} \operatorname{arc\,tg} y \overset{1}{=} \pi/2$$

Veamos otro ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x}$$

Como en el ejemplo anterior, observamos que en este caso $x_0=0$, g=ln y $f(x)=(1+x)^{1/x}$.

1º) Calculamos y_0:

$$y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} \overset{2}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot(1+x-1)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} 1} = e^1=e$$

2º) Como se cumple la segunda condición, ya que g=ln es continua en e, aplicamos la regla, esto es, hacemos el cambio de variable f(x)=y:

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to e} \ln y = \ln e = 1$$

Veamos un ejemplo más:

$$\lim_{x\to +\infty} \ln \frac{x}{x^2+1}$$

Antes de nada, observa que en este caso $x_0=+\infty$, g=ln y $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

1º) Calculamos y_0:

$$y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{+\infty\cdot(1+0)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

2º) Como se cumple la tercera condición, ya que $f(x)=x/(x^2+1)$ es distinto de $y_0=0$ en un entorno de $+\infty$, en $(0,+\infty)$ por ejemplo, aplicamos la regla, esto es, hacemos el cambio f(x)=y:

$$\lim_{x\to +\infty} \ln \frac{x}{x^2+1} \overset{3}{=} \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \ln y = -\infty$$

[1] Recuerda la gráfica de la función arco tangente. Si no la recuerdas del todo, la calculadora (en radianes) puede sacarte de apuros: arc tg 100=1,56… y π/2=1,57… Y si uno no es demasiado escrupuloso, también puede razonar así: $\operatorname{arctg}(+\infty)=z \Leftrightarrow \operatorname{tg} z=+\infty \Leftrightarrow z=\pi/2$.

[2] Ya que sale la indeterminación $1^{\pm\infty}$.

[3] Observa que $y_0=0^+$.

* * *

Si el límite de $f(x)$ en x_0 es inmediato, se procede directamente:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x^2+\pi) = \operatorname{sen}(0^2+\pi) = \operatorname{sen}\pi = 0$$

2.- Cálculo de límites por cambio de variable

Veamos ahora una propiedad que tampoco vamos a demostrar y que nos va a permitir el cálculo de algunos límites[1]:

Si f es una función inyectiva[2] y $\lim_{x\to x_0} f^{-1}(x)=y_0$, se puede dar el siguiente paso (que consiste en hacer el cambio de variable[3] $x=f(y)$):

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{y\to y_0} g(f(y))$$

Veamos un ejemplo:

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$$

1º) Buscamos el cambio de variable $x=f(y)$. En este caso, con el fin de eliminar ambas raíces, el cambio apropiado es $x=y^6$.

2º) Calculamos $y=f^{-1}(x)$, esto es, la recíproca[4] de la función anterior, que en este caso es $y=\sqrt[6]{x}$.

3º) Hallamos y_0:

$$y_0 = \lim_{x\to x_0} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 64} \sqrt[6]{x} = 2$$

4º) Aplicamos la regla:

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8} = \lim_{y\to 2} \frac{y^2-4}{y^3-8} \overset{5}{=} \lim_{y\to 2} \frac{(y-2)(y+2)}{(y-2)(y^2+2y+4)} = \lim_{y\to 2} \frac{y+2}{y^2+2y+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

3.- Problemas

1) Si al calcular el límite de una función potencial-exponencial f^g sale una de las expresiones indeterminadas $1^{\pm\infty}$, 0^0 y $(+\infty)^0$, se aplica la fórmula $f^g=e^{g\cdot\ln f}$. Demuestra, calculando el límite de $g\cdot\ln f$, que

[1] Propiedad que es cierta tanto si x_0 es un número real como si es $+\infty$ o $-\infty$, y que también se cumple cuando se trata de límites laterales.
[2] Recuerda que para que una función tenga *recíproca* debe ser inyectiva. Lo que significa que las rectas horizontales cortan a su gráfica como mucho en un punto. La recíproca de f se denota por f^{-1}.
[3] Recuerda que si $x=f(y)$ es inyectiva, entonces su recíproca es $y=f^{-1}(x)$.
[4] Observa que la función $x=y^6$ no es inyectiva en su dominio máximo, pero sí en $(0,+\infty)$.
[5] Descomponemos los dos polinomios por Ruffini.

los tres casos se reducen a la indeterminación $0\cdot\infty$. Indica en cada uno de ellos la condición que se verifica al calcular el límite de la función compuesta $\ln f$.

2) Calcula los siguientes límites. Si utilizas el límite de la composición, indica la condición que se cumple en cada caso:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+x}{x^2}\right)^{-x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{x}{2x+7}\right)^{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos(4^x-5^x)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{1+\ln x^x}{\ln x}$ **e)** $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \operatorname{ctg}(\pi x)$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sen}\frac{3x+2}{2x^2+1}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left|\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right|$ **h)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{1+e^{-x}}{x}$ **i)** $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\x>\pi/2}} \operatorname{ctg}(2x)$

j) $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{sen}\frac{x^2-\pi x}{2x}$ **k)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,cos}(\ln x)^{1-x}$ **l)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x^3}$

m) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \operatorname{tg}\frac{\pi-x}{x+2}$ **n)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-\sqrt[3]{x^2-5})$ **ñ)** $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$

o) $\lim\limits_{x\to1} \ln\frac{x}{x-1}$ **p)** $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{arc\,cosec}\frac{\sqrt{x^2-3x}}{x}$ **q)** $\lim\limits_{x\to2} \operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$

3) Calcula los siguientes límites. Si utilizas el límite de la composición, indica la condición que se cumple en cada caso:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} [\ln x^3-\ln(x+7)]$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,ctg} x^{3+\operatorname{sen}x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to1} \operatorname{arc\,sec}(\ln x)^{1/(1-x)}$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}} \frac{x-\pi}{\operatorname{tg}(x/2)}$ **f)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x[\ln(x-3)-2\cdot\ln x])$

g) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(x^2-x)}{1-x}$ **h)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(5+\cos x)^x$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,sec}(\sqrt{4x^2-x}+x)$ **j)** $\lim\limits_{x\to4} \operatorname{arc\,cosec}\frac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x}-2}$

4) Calcula, mediante un cambio de variable adecuado:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+8e^{2x}}{e^x+4e^{2x}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to1} \frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to1} \frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1}$