

Índice: Funciones. Límite de una función en $+\infty$. Límite de una función en $-\infty$. Problemas.

1.- Funciones

Recordemos que una *función* f queda determinada si se conoce su *regla de transformación*¹ y su *dominio de definición*²:

$$f \equiv \begin{cases} f(x)=... \\ \text{Dom}(f)=... \end{cases}$$

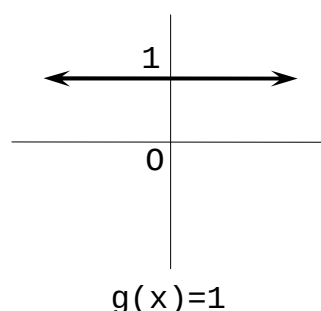
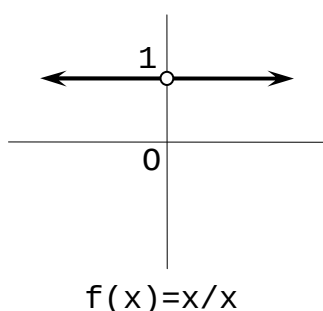
Por tanto, dos funciones f y g son iguales si tienen la misma regla de transformación y el mismo dominio:

$$f=g \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ \text{Dom}(f)=\text{Dom}(g) \end{cases}$$

Si dos funciones f y g tienen la misma regla de transformación y $\text{Dom}(f) \subset^3 \text{Dom}(g)$, se dice que f es una *restricción* de g o que g es una *extensión* de f . Así, la función $f(x)=x/x$ es una restricción de la función $g(x)=1$ (o g una extensión de f), ya que se comportan igual y $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ y $\text{Dom}(g)=\mathbb{R}$.

Se llama *gráfica* de f , y se denota por $\text{Gráf}(f)$, al conjunto de puntos (x,y) tales que $x \in \text{Dom}(f)$ e $y=f(x)$.

Por ejemplo, las gráficas de las funciones mencionadas en el párrafo anterior son:



2.- Límite de una función en $+\infty$

Nos proponemos estudiar el comportamiento de una función f en $+\infty$. Dicho de otro modo, cuando la variable x toma valores cada vez más

¹ Dicha regla transforma cada valor de x (la variable independiente) en un único valor de y (la variable dependiente): $f(x)=y$.

² Conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente. Se denota por $\text{Dom}(f)$. Cuando no se especifique el dominio de una función cuya regla de transformación se nos da, se supondrá definida en su *dominio máximo*, es decir, allí donde dicha regla tenga sentido. Por ejemplo, el dominio de $f(x)=x^2$, sin más datos, es $\mathbb{R}$ (los números reales).

³ Este símbolo se lee "está contenido en" o "es un subconjunto de".

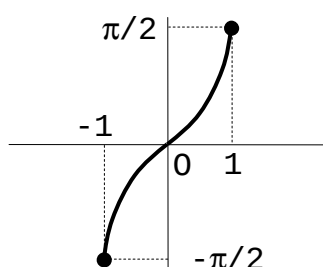
grandes y tan grandes como queramos, esto es, cuando x *tiende* a $+\infty$, ¿qué sucede con la variable y ?, ¿a qué *tiende*? Vamos a estudiar esas tendencias utilizando sucesiones.

Si $x_1, x_2, x_3, \dots$ es una sucesión contenida en $\text{Dom}(f)$, es evidente que la sucesión $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ está contenida¹ en $\text{Im}(f)$.

Pues bien, consideremos todas las sucesiones $x_1, x_2, x_3, \dots$ contenidas en $\text{Dom}(f)$ que tienden a $+\infty$. ¿Qué sucede con las sucesiones $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$?

Veamos los distintos casos posibles con algunos ejemplos sencillos.

1º) Hay funciones cuyo dominio no contiene ninguna sucesión que tienda a $+\infty$. La función $f(x)=\arcsen x$ es un ejemplo:



En estos casos diremos que *no tiene sentido plantear el límite de la función en $+\infty$* .

2º) La función $f(x)=1$ transforma todas las sucesiones contenidas en su dominio que tienden a $+\infty$ en sucesiones que tienden a 1:

$\text{Dom}(f)$	$\text{Im}(f)$
x_1	$f(x_1)=1$
x_2	$f(x_2)=1$
x_3	$f(x_3)=1$
$\dots$	$\dots$
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	1

En este caso diremos que *el límite de la función f en $+\infty$ es 1*, y lo indicaremos² así:

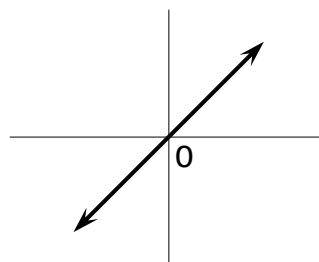
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

3º) La función $f(x)=x$ transforma todas las sucesiones contenidas en su dominio que tienden a $+\infty$ en sucesiones que tienden a $+\infty$:

¹ La *imagen de la función* f , que se denota por $\text{Im}(f)$, es el conjunto de los valores que toma la variable dependiente. Dada la función f , esto es, dada su regla de transformación y su dominio, el conjunto $\text{Im}(f)$ queda determinado. Así, la función $f(x)=x^2$ con $\text{Dom}(f)=(2,3]$ tiene por imagen $\text{Im}(f)=(4,9]$.

² Observa que esta notación recoge de alguna manera la información más relevante: el símbolo $x \rightarrow +\infty$ se refiere a las sucesiones (x_n) que tienden a $+\infty$; y la expresión $\lim f(x)=1$ indica que entonces las sucesiones $(f(x_n))$ tienden a 1.

Dom(f)	Im(f)
x_1	$f(x_1)=x_1$
x_2	$f(x_2)=x_2$
x_3	$f(x_3)=x_3$
$\dots$	$\dots$
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	$+\infty$

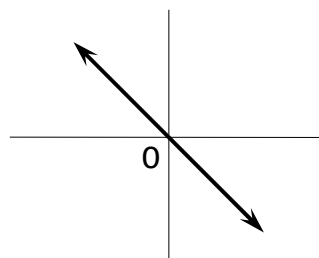


En este caso diremos que el límite de la función f en $+\infty$ es $+\infty$, y lo indicaremos así:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

4º) La función $f(x)=-x$ transforma todas las sucesiones contenidas en su dominio que tienden a $+\infty$ en sucesiones que tienden a $-\infty$:

Dom(f)	Im(f)
x_1	$f(x_1)=-x_1$
x_2	$f(x_2)=-x_2$
x_3	$f(x_3)=-x_3$
$\dots$	$\dots$
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	$-\infty$

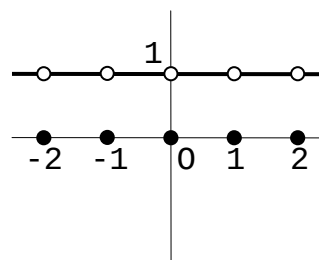


En este caso diremos que el límite de la función f en $+\infty$ es $-\infty$, y lo indicaremos así:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

5º) Por último, la siguiente función no transforma todas las sucesiones contenidas en su dominio que tienden a $+\infty$ en sucesiones que tienen el mismo límite ($\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



En efecto:

Dom(f)	Im(f)
1	$f(1)=0$
2	$f(2)=0$
3	$f(3)=0$
$\dots$	$\dots$
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	0

Dom(f)	Im(f)
1,5	$f(1,5)=1$
2,5	$f(2,5)=1$
3,5	$f(3,5)=1$
$\dots$	$\dots$
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	1

0 si se prefiere:

Dom(f)	Im(f)
1	$f(1)=0$
1,5	$f(1,5)=1$
2	$f(2)=0$
2,5	$f(2,5)=1$
...	...
↓	↓
$+\infty$	oscilante

En este caso diremos que *no existe el límite de la función en $+\infty$* .

* * *

Resumiendo, vemos que solo se pueden presentar tres casos:

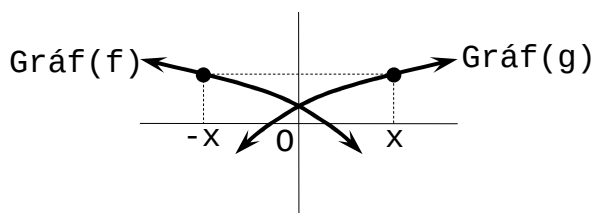
Casos	Caracterización
No tiene sentido plantear el límite de f en $+\infty$	Si Dom(f) no contiene ninguna sucesión que tienda a $+\infty$
El límite de f en $+\infty$ es L	Si la función f transforma todas las sucesiones contenidas en Dom(f) que tienden a $+\infty$ en sucesiones que tienden a L
No existe el límite de f en $+\infty$	Si la función f no transforma todas las sucesiones contenidas en Dom(f) que tienden a $+\infty$ en sucesiones que tienen el mismo límite

En la segunda línea de la tabla, que aparece remarcada, se establece la definición de límite de una función f en $+\infty$. Como hemos visto en los ejemplos, L puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

3.- Límite de una función en $-\infty$

Las mismas consideraciones pueden hacerse en $-\infty$, pero no merece la pena repetirlas. Tan solo interesa una cuestión de interés práctico.

Si las funciones f y g son simétricas respecto del eje OY, es evidente que $g(x)=f(-x)$:



Resulta entonces que el límite de la función f en $-\infty$ coincide con el límite de la función g en $+\infty$. Y como $g(x)=f(-x)$, puede utilizarse

la siguiente fórmula:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$$

4.- Problemas

- 1) Define límite de una función en $-\infty$.
- 2) Prueba que el límite de $f(x)=k$, tanto en $+\infty$ como en $-\infty$, es k .
- 3) Prueba que el límite de $f(x)=x$ en $+\infty$ es $+\infty$; y en $-\infty$, $-\infty$.
- 4) Da un ejemplo de función que no tenga¹ límite en $+\infty$.
- 5) Demuestra que las funciones sen , cos , tg , cosec , sec y ctg no tienen límite en el infinito.
- 6) En los siguientes casos, ¿tiene sentido plantear el límite de la función f en $-\infty$?:
 - a) $f(x)=\ln x$
 - b) $f(x)=\arcsen x$
 - c) $f(x)=\arccos x$
 - d) $f(x)=\ln \frac{2+x}{1-x}$
 - e) $f(x)=\arcsen \frac{x+1}{x-1}$
 - f) $f(x)=\sqrt{x^3+x-2}$
- 7) Dibuja la gráfica de una función que verifique los límites indicados:
 - a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=3$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty$
 - b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=0$
 - c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=-\infty$
 - d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=2$
- 8) A la vista de sus gráficas (o con la calculadora) indica los límites en el infinito ($\pm\infty$) de las siguientes funciones:
 - a) $y=\ln x$
 - b) $y=e^x$
 - c) $y=\arccosec x$
 - d) $(1/3)^x$
 - e) $y=\text{arc sec } x$
 - f) $y=\text{arc tg } x$
 - g) $y=\text{arc ctg } x$
 - h) $\log_{1/3} x$
- 9) Si $f(x)>0 \forall x$, ¿puede ser negativo el límite de f en $+\infty$? ¿Y 0?
- 10) Sean f , g y h tres funciones² tales que $f(x)\leq g(x)\leq h(x) \forall x$. Si el límite de f en $+\infty$ es el número real L y el de h también es L , ¿cuál es el de g ? Justifícalo gráficamente.
- 11) Sean f y g dos funciones³ tales que $f(x)\leq g(x) \forall x$. Si el límite de f en $+\infty$ es $+\infty$, ¿cuál es el de g ? Y si el de g en $+\infty$ es $-\infty$, ¿cuál es el de f ? Justifícalo gráficamente.

¹ Que no exista.

² Esta es la *regla del sandwich*.

³ Esta propiedad es un caso especial de la regla del sandwich.