*Índice: Límites laterales. Problemas.*

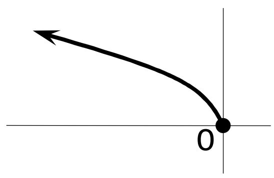
## 1.- Límites laterales

En la lección anterior estudiamos el comportamiento de una función en $+\infty$ mediante sucesiones que tienden a $+\infty$ (por su izquierda, como no puede ser de otra manera). Ahora, sin embargo, al querer estudiar de la misma forma el comportamiento de una función en las proximidades[1] de un punto $x_0$, se nos presenta la doble posibilidad de hacerlo mediante sucesiones que tienden a $x_0$ por la izquierda o por la derecha. Hagámoslo por la derecha, por ejemplo.

Consideremos todas las sucesiones $x_1, x_2, x_3, \dots$ contenidas en Dom(f), que tienden a $x_0$ *y cuyos términos son mayores*[2] *que* $x_0$. ¿Qué sucede con las sucesiones $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$?

Veamos los distintos casos que se pueden presentar en un punto cualquiera, en $x_0=0$ por ejemplo, con algunas funciones sencillas.

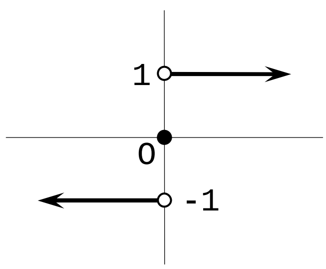
**1º)** Hay funciones cuyos dominios no contienen ninguna sucesión que tienda a 0 y cuyos términos sean mayores que 0. La función $f(x)=\sqrt{-x}$ es un ejemplo:




En estos casos diremos que *no tiene sentido plantear el límite lateral derecho de la función en 0*.

**2º)** La *función signo* convierte los números negativos en -1, el 0 en 0 y los positivos en 1:

$$Sig(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ 1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$




Pues bien, esta función transforma todas las sucesiones contenidas en su dominio, que tienden a 0 y cuyos términos son mayores que 0 en sucesiones que tienden a 1:

---

[1] Estudiar la función f en el punto de abscisa $x_0$ es sencillo: si $x_0$ no pertenece al dominio de la función, $f(x_0)$ no existe; si $x_0$ pertenece al dominio de la función, $f(x_0)$ es un número real que se calcula con la regla de transformación de la función. Aquí analizamos una cuestión distinta.

[2] Pues no nos interesa aquí, como se indica en la nota anterior, lo que pase en $x_0$.

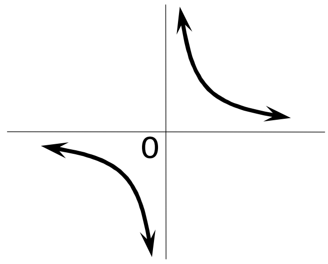
| Dom(f) | Im(f) |
|---|---|
| $x_1>0$ | $f(x_1)=1$ |
| $x_2>0$ | $f(x_2)=1$ |
| $x_3>0$ | $f(x_3)=1$ |
| … | … |
| ↓ | ↓ |
| 0 | 1 |

En este caso diremos que *el límite lateral derecho de la función f en 0 es 1*, y lo indicaremos así:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

**3º)** La función $f(x)=1/x$ transforma todas las sucesiones contenidas en su dominio, que tienden a 0 y cuyos términos son mayores que 0 en sucesiones que tienden a $+\infty$:

| Dom(f) | Im(f) |
|---|---|
| $x_1>0$ | $f(x_1)=1/x_1$ |
| $x_2>0$ | $f(x_2)=1/x_2$ |
| $x_3>0$ | $f(x_3)=1/x_3$ |
| … | … |
| ↓ | ↓ |
| 0 | $+\infty$ |

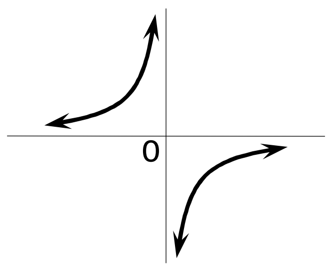



En este caso diremos que *el límite lateral derecho de la función f en 0 es $+\infty$*, y lo indicaremos así:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$$

**4º)** La función $f(x)=-1/x$ transforma todas las sucesiones contenidas en su dominio, que tienden a 0 y cuyos términos son mayores que 0 en sucesiones que tienden a $-\infty$:

| Dom(f) | Im(f) |
|---|---|
| $x_1>0$ | $f(x_1)=-1/x_1$ |
| $x_2>0$ | $f(x_2)=-1/x_2$ |
| $x_3>0$ | $f(x_3)=-1/x_3$ |
| … | … |
| ↓ | ↓ |
| 0 | $-\infty$ |

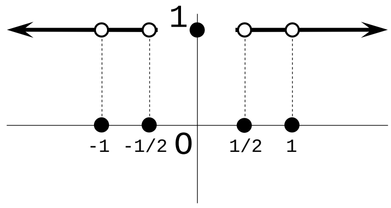



En este caso diremos que *el límite lateral derecho de la función f en 0 es $-\infty$*, y lo indicaremos así:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

**5º)** Por último, la siguiente función[1] no transforma todas las sucesiones contenidas en su dominio, que tienden a 0 y cuyos términos son mayores que 0 en sucesiones que tienen el mismo límite (Z* es el conjunto de los números enteros sin el cero).

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } & x=1/n, \text{ con } n\in Z^* \\ 1 \text{ si } & x\neq 1/n, \text{ con } n\in Z^* \end{cases}$$




En efecto:

| Dom(f) | Im(f) |
|---|---|
| 1 | f(1)=0 |
| 1/2 | f(1/2)=0 |
| 1/3 | f(1/3)=0 |
| … | … |
| ↓ | ↓ |
| 0 | 0 |

| Dom(f) | Im(f) |
|---|---|
| 3/10 | f(3/10)=1 |
| 3/100 | f(3/100)=1 |
| 3/1000 | f(3/1000)=1 |
| … | … |
| ↓ | ↓ |
| 0 | 1 |

O si se prefiere:

| Dom(f) | Im(f) |
|---|---|
| 3/10 | f(3/10)=1 |
| 1/10 | f(1/10)=0 |
| 3/100 | f(3/100)=1 |
| 1/100 | f(1/100)=0 |
| … | … |
| ↓ | ↓ |
| 0 | oscilante |

En este caso diremos que *no existe el límite lateral derecho de la función f en 0*.

* * *

Vemos que solo se pueden presentar tres casos:

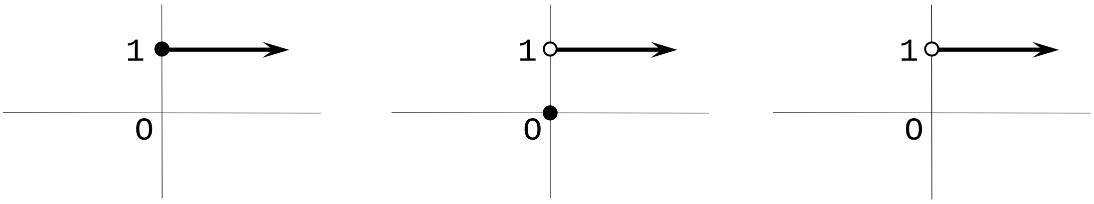
| Casos | Caracterización |
|---|---|
| No tiene sentido plantear el límite lateral derecho de la función f en $x_0$ | Si Dom(f) no contiene ninguna sucesión que tiende a $x_0$ y cuyos términos son mayores que $x_0$ |
| El límite lateral derecho de la función f en $x_0$ es L | Si la función f transforma todas las sucesiones contenidas en Dom(f), que tienden a $x_0$ y cuyos términos son mayores que $x_0$ en sucesiones que tienden a L |
| No existe el límite lateral derecho de la función f en $x_0$ | Si la función f no transforma todas las sucesiones contenidas en Dom(f), que tienden a $x_0$ y cuyos términos son mayores que $x_0$ en sucesiones que tienen el mismo límite |

[1] La gráfica de esta función en las proximidades del origen de coordenadas solo cabe imaginársela.

La segunda línea de la tabla, que está remarcada, establece la definición de límite lateral derecho. Como hemos visto en los ejemplos, L puede ser un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

* * *

Como el concepto de límite lateral derecho de una función f en $x_0$ solo depende de las sucesiones contenidas en su dominio, que tienden a $x_0$ y cuyos términos son *mayores que* $x_0$, dicho concepto es independiente de si existe o no $f(x_0)$, o de su valor. Los siguientes ejemplos ponen de manifiesto lo que se quiere decir.




$f(0)=1$ $\quad$ $f(0)=0\neq 1$ $\quad$ No existe $f(0)$

En los tres casos:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1$$

* * *

Si se consideran las sucesiones contenidas en Dom(f), que tienden a $x_0$ y cuyos términos son menores que $x_0$, es fácil llegar al concepto de límite lateral izquierdo.

## 2.- Problemas

**1)** Define límite lateral izquierdo de una función en un punto.

**2)** Dibuja la gráfica de una función que verifique los límites siguientes:

**a)** $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty$ y $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty$ $\quad$ **b)** $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty$ y $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-\infty$

**c)** $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$ y $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=0$ $\quad$ **d)** $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=0$ y $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=2$

**3)** A la vista de sus gráficas (o con la calculadora), indica los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos indicados:

**a)** $y=\ln x$ en $x=0$ $\quad$ **b)** $y=\operatorname{tg} x$ en $x=\pi/2$

**c)** $y=\operatorname{cosec} x$ en $x=0$ $\quad$ **d)** $y=\sec x$ en $x=\pi/2$

**e)** $y=\operatorname{ctg} x$ en $x=0$ $\quad$ **f)** $y=\operatorname{arc\,sen} x$ en $x=1$

**g)** $y=\operatorname{arc\,cos} x$ en $x=1$ $\quad$ **h)** $y=\operatorname{arc\,cosec} x$ en $x=1$

**i)** $y=\operatorname{arc\,sec} x$ en $x=1$ $\quad$ **j)** $y=\log_{1/3} x$ en $x=0$

**4)** Si el límite lateral derecho de f en 0 es 1, justifica gráficamente el valor del límite lateral izquierdo de f en 0 si f es una función[1]:

**a)** par **b)** impar

**5)** Dibuja las gráficas de dos funciones f y g simétricas respecto del eje de ordenadas y tales que el límite lateral derecho de f en 3 sea 2, mientras que el límite lateral derecho de g en -3 no sea 2.

**6)** Si f es una función par y el límite lateral derecho de f en 2 es 4, ¿qué otro límite lateral de esa función te están dando? ¿Y si es impar?

**7)** Si f y g son dos funciones simétricas respecto del eje de abscisas y el límite lateral derecho de f en 3 es $-\infty$, ¿qué límite lateral de g conoces?

**8)** Si $f(x)<0\ \forall x$, ¿puede ser positivo el límite lateral izquierdo de f en 0? ¿Y si la función solo es negativa en un entorno de 0?

**9)** Sean f, g y h tres funciones[2] tales que $f(x)\leq g(x)\leq h(x)\ \forall x$. Si el límite lateral derecho de f en $x_0$ es el número real L y el de h también es L, ¿cuál es el de g? Justifícalo gráficamente.

**10)** Sean f y g dos funciones[2] tales que $f(x)\leq g(x)\ \forall x$. Si el límite lateral izquierdo de f en $x_0$ es $+\infty$, ¿cuál es el de g? Y si el límite lateral izquierdo de g en $x_0$ es $-\infty$, ¿cuál es el de f? Justifícalo gráficamente.

[1] Recuerda que una función es par si su gráfica es simétrica respecto del eje de abscisas; e impar si su gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas.
[2] Vuelve a aparecer aquí la regla del sandwich.