Índice: Asíntotas. Cálculo de las asíntotas verticales. Problemas.

1.- Asíntotas

Recordemos que las funciones pueden tener tres tipos de asíntotas: horizontales, verticales y oblicuas. El cálculo de las verticales lo veremos en el próximo apartado; y el de las otras dos, en la próxima lección. A continuación repasaremos las definiciones.

* * *

1º) *La recta $x=x_0$ es una asíntota vertical de la función f* si al menos uno de los dos límites laterales de la función f en x_0 es infinito.

Por ejemplo, la recta x=0 es la única asíntota vertical de las funciones f(x)=1/x y g(x)=ln x:

* * *

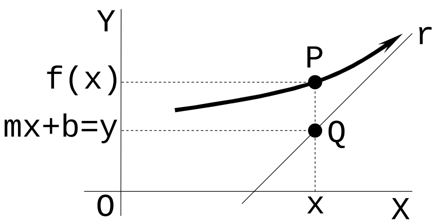
2º) *La recta y=k es asíntota horizontal de la función f en +∞* si el límite de la función f en +∞ es k.

Del mismo modo se define el concepto de *asíntota horizontal de una función en -∞*.

Por ejemplo, la recta y=0 es la única asíntota horizontal de la función f(x)=1/x tanto en +∞ como en -∞. Sin embargo, la función ln no tiene asíntotas horizontales.

* * *

3º) Consideremos una función f cuya gráfica se aproxima cada vez más a una recta oblicua r como se muestra en la siguiente figura:



En estos casos se dice que r es una asíntota oblicua de f. Precisemos un poco más esto.

Sean $P(x,y_P)$ y $Q(x,y_Q)$ los puntos de las gráficas de f y r, respectivamente, de abscisa común x. Supongamos que $y=mx+b$, con $m\neq 0$ (ya que se trata de una recta oblicua), es la ecuación de la recta r y que $y=f(x)$ es la ecuación de la función f. Como $y_P=f(x)$ e $y_Q=mx+b$, entonces la longitud del segmento PQ es:

$$PQ=y_P-y_Q=f(x)-(mx+b)=f(x)-mx-b$$

Observa que el segmento PQ se hace cada vez más pequeño conforme x crece. Pues bien, se define asíntota oblicua de f en $+\infty$ de la siguiente manera[1]:

$$y=mx+b \text{ es } \textit{asíntota oblicua de f en } +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx-b]=0$$

Para determinar la ecuación de la asíntota oblicua necesitamos calcular m y b. Sus valores se obtienen con las fórmulas siguientes:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad\qquad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]$$

Ambas fórmulas se deducen de la definición:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx-b]=0 \overset{2}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]-b=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=b$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx-b]=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-mx-b}{x}=\dfrac{0}{+\infty}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}-m-\dfrac{b}{x}\right)=0 \overset{2}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-m-0=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m$$

2.- Cálculo de las asíntotas verticales

Dada una función cualquiera, ¿en qué puntos puede suceder que al menos uno de los dos límites laterales sea infinito?

Esta situación solo puede darse en dos casos:

1º) En aquellos valores de x que anulan algún denominador de la función[3].

2º) En aquellos valores de x que anulan el argumento[4] de un logaritmo[5].

---

[1] Del mismo modo se define la asíntota oblicua de una función f en $-\infty$.
[2] El límite de una suma (resta) es la suma (resta) de los límites.
[3] Las funciones trigonométricas tg, sec, cosec y ctg son cocientes de funciones y, por tanto, habrá que estudiar cuándo se anula el denominador si se nos piden las asíntotas verticales de dichas funciones.
[4] El argumento de $\ln f$ es f.
[5] Recuerda que al transformar una función potencial-exponencial en una función exponencial mediante la fórmula $f^g=e^{g\cdot \ln f}$ aparece un logaritmo que habrá que tener en cuenta, como se dice en el texto, a la hora de calcular las asíntotas verticales de estas funciones.

Si el logaritmo es de base variable, debe escribirse primero como cociente de logaritmos neperianos:

$$f(x)=\log_{x+1}(x+2)=\frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}$$

* * *

Calculemos, por ejemplo, las asíntotas verticales de la función:

$$f(x)=\ln\frac{x}{x-1}$$

Los puntos que hay que estudiar[1] son x=0 y x=1.

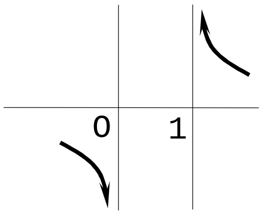
La recta x=0 es asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \ln\frac{x}{x-1} \overset{2}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \ln\frac{x}{x-1} \overset{3}{=} \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \ln y = -\infty$$

La recta x=1 es asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \ln\frac{x}{x-1} \overset{2}{=} \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln\frac{x}{x-1} \overset{4}{=} \lim_{y\to +\infty} \ln y = +\infty$$

Esos mismos límites nos dan la posición relativa de la gráfica con respecto a sus asíntotas verticales:



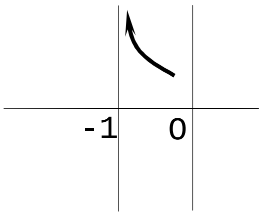
Otro ejemplo. Calculemos las asíntotas verticales de la función:

$$f(x)=(x+1)^{x-2}$$

Como $f(x)=(x+1)^{x-2}=e^{(x-2)\cdot\ln(x+1)}$, hay que estudiar x=-1.

La recta x=-1 es asíntota vertical:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} (x+1)^{x-2} \overset{5}{=} \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (x+1)^{x-2} = 0^{-3} = +\infty$$



[1] El primero anula el argumento del logaritmo y el segundo anula un denominador.
[2] Ya que $Dom(f)=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.
[3] Ya que se cumple la tercera condición del límite de la composición e $y_0=0^+$.
[4] Ya que se cumple la primera condición del límite de la composición.
[5] Ya que $Dom(f)=(-1,+\infty)$.

3.- Problemas

1) ¿Cuántas asíntotas verticales puede tener una función?

2) Define asíntota horizontal de una función en $-\infty$.

3) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener una función?

4) A la vista de sus gráficas, calcula las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones:

a) $y=\operatorname{tg} x$ **b)** $y=\operatorname{ctg} x$

c) $y=\sec x$ **d)** $y=\operatorname{cosec} x$

e) $y=\operatorname{arc\,tg} x$ **f)** $y=\operatorname{arc\,ctg} x$

g) $y=\operatorname{arc\,sec} x$ **h)** $y=\operatorname{arc\,cosec} x$

i) $y=\ln x$ **j)** $y=e^x$

k) $y=\log_{1/3} x$ **l)** $y=(1/3)^x$

5) Define asíntota oblicua de una función en $-\infty$. Deduce las fórmulas correspondientes de m y b.

6) ¿Cuántas asíntotas oblicuas puede tener una función?

7) Calcula las asíntotas verticales de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$

d) $f(x)=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$ **e)** $f(x)=\dfrac{3}{x^3-3x}$ **f)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$

g) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4-x^2}}{x^2-x}$ **h)** $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^3}$ **i)** $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{1/(x+1)}$

j) $f(x)=\operatorname{tg}(x-2)$ **k)** $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x-2}}{x}$ **l)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$

m) $f(x)=(1+x)^{1/(x^2-1)}$ **n)** $f(x)=\left(\dfrac{2x+1}{2}\right)^{\ln(x-x^2)}$ **ñ)** $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x^3}$

o) $f(x)=\log_{x+1}(x+2)$ **p)** $f(x)=\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2}$ **q)** $f(x)=\ln\dfrac{x^2-x}{2-x}$