Índice: Continuidad lateral. Estudio de la continuidad lateral. Problemas.

1.- Continuidad lateral

Si $x_0 \in Dom(f)$, vamos a relacionar el comportamiento de la función f en las proximidades de x_0 (a su derecha, por ejemplo) con el valor de la función en el punto, esto es, con $f(x_0)$.

Como hicimos con los límites laterales, también aquí utilizaremos sucesiones.

Pues bien, si consideramos todas las sucesiones x_1, x_2, x_3,… contenidas en Dom(f), que tienden a x_0 *y cuyos términos son mayores o iguales*[1] *que* x_0, solo pueden darse dos casos:

1º) La función f transforma todas ellas en sucesiones que tienden a $f(x_0)$, en cuyo caso diremos que *f es continua por la derecha en* x_0:

Dom(f)	Im(f)
$x_1 \geq x_0$	$f(x_1)$
$x_2 \geq x_0$	$f(x_2)$
$x_3 \geq x_0$	$f(x_3)$
…	…
$\downarrow$	$\downarrow$
x_0	$f(x_0)$

2º) La función f no transforma todas ellas en sucesiones que tienden a $f(x_0)$, en cuyo caso diremos que *f es discontinua por la derecha en* x_0 o que *f tiene una discontinuidad por la derecha en* x_0.

Ahora bien, no todas las discontinuidades son del mismo tipo. En general, se clasifican en dos grandes grupos: *evitables* y *esenciales*. Estas últimas a su vez pueden ser de *primera especie* o de *segunda especie*. Por último, las de primera especie pueden ser *de salto finito* o *de salto infinito*:

- **DISCONTINUIDAD**
  - **EVITABLE**
  - **ESENCIAL**
    - **DE PRIMERA ESPECIE**
      - **DE SALTO FINITO**
      - **DE SALTO INFINITO**
    - **DE SEGUNDA ESPECIE**

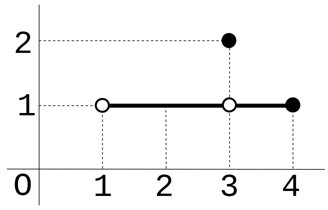
Por otro lado, si $x_0 \notin Dom(f)$, entonces *no tiene sentido* plantearse la cuestión de si f es continua o discontinua por la derecha en x_0.

* * *

[1] Observa la diferencia con la definición de límite lateral. Y es que ahora es fundamental lo que pase en x_0.

Por ejemplo, estudiemos el comportamiento de la siguiente función en los puntos señalados:

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ si } & 1<x<3\\ 2 \text{ si } & x=3\\ 1 \text{ si } & 3<x\leq 4\end{cases}$$



• Como $1\notin Dom(f)=(1,4]$, no tiene sentido plantearse si esta función es continua o discontinua por la derecha en dicho punto[1].

• La función es continua por la derecha en 2, ya que $f(2)=1$ y, evidentemente[2]:

Dom(f)	Im(f)
$x_1\geq 2$	$f(x_1)=1$
$x_2\geq 2$	$f(x_2)=1$
$x_3\geq 2$	$f(x_3)=1$
…	…
↓	↓
2	1

• La función es discontinua[3] por la derecha en 3, ya que $f(3)=2$ y, evidentemente:

Dom(f)	Im(f)
$3,1\geq 3$	$f(3,1)=1$
$3,01\geq 3$	$f(3,01)=1$
$3,001\geq 3$	$f(3,001)=1$
…	…
↓	↓
3	1

• La función es continua por la derecha en 4, ya que $f(4)=1$ y la función f transforma la sucesión constante 4, 4, 4,…, que es la única sucesión de su dominio cuyos términos son mayores o iguales que 4, en la sucesión 1, 1, 1, …, cuyo límite es 1:

Dom(f)	Im(f)
$4\geq 4$	$f(4)=1$
$4\geq 4$	$f(4)=1$
$4\geq 4$	$f(4)=1$
…	…
↓	↓
4	1

* * *

[1] Y lo mismo puede decirse de todos aquellos puntos que no pertenecen a su dominio.
[2] Puede ser que algún término de la sucesión x_1, x_2, x_3… valga 3, en cuyo caso algún término de la sucesión $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$… valdrá 2, pero su límite será 1.
[3] El tipo de discontinuidad lo veremos en el siguiente apartado.

Si se consideran las sucesiones contenidas en Dom(f), que tienden a x_0 y cuyos términos son menores o iguales que x_0, es fácil, haciendo las mismas consideraciones, llegar a los conceptos de continuidad lateral izquierda y discontinuidad lateral izquierda.

2.- Estudio de la continuidad lateral

El procedimiento que se sigue para ver si una función f es continua o discontinua por la derecha (por ejemplo) en un punto x_0 de su dominio consiste en estudiar el límite lateral derecho, lo que nos permitirá también clasificar las discontinuidades laterales.

En el siguiente cuadro aparecen en la primera columna las distintas posibilidades que se pueden presentar, y en la segunda columna, la manera en que, a partir de ahora, nos referiremos a esas situaciones[1]:

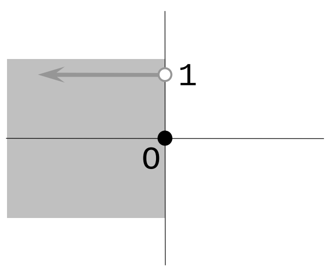
El límite lateral derecho de f en x_0:	**La función f:**
No tiene sentido plantearlo	Es continua por la derecha en x_0
Es $f(x_0)$	Es continua por la derecha en x_0
Es un número distinto de $f(x_0)$	Tiene una discontinuidad evitable por la derecha en x_0
Es infinito	Tiene una discontinuidad de salto infinito por la derecha en x_0
No existe	Tiene una discontinuidad de segunda especie por la derecha en x_0

* * *

Veamos algunas funciones que ilustran los distintos casos[2].

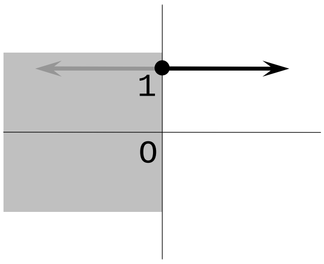
• La siguiente función es continua por la derecha en 0, ya que no tiene sentido plantear su límite lateral derecho en dicho punto:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$



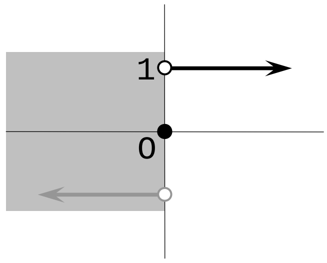
• La función f(x)=1 es continua por la derecha en 0, ya que su límite lateral derecho en 0 es f(0):

[1] Observa que en la tabla no aparecen las discontinuidades de salto finito.
[2] Hemos "tapado" las gráficas de las funciones a la izquierda de 0 pues estamos estudiando en todas ellas la continuidad por la derecha en 0 y, por tanto, lo que suceda a la izquierda de dicho punto no juega ningún papel.



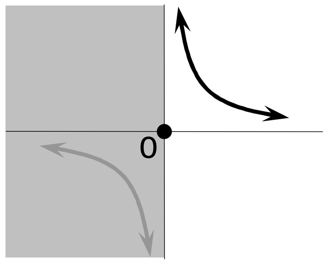
• La función signo tiene una discontinuidad evitable[1] por la derecha en 0, ya que su límite lateral derecho en 0 es 1, mientras que f(0)=0:

$$Sig(x)=\begin{cases}-1 & si \quad x<0\\ 0 & si \quad x=0\\ 1 & si \quad x>0\end{cases}$$



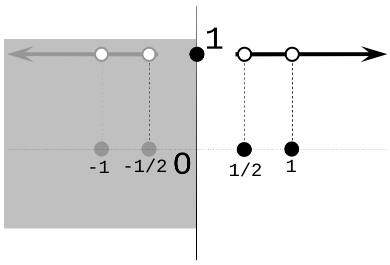
• La siguiente función tiene una discontinuidad de salto infinito[2] por la derecha en 0, ya que su límite lateral derecho en 0 es +∞:

$$f(x)=\begin{cases}1/x & si \quad x\neq 0\\ 0 & si \quad x=0\end{cases}$$



• La siguiente función tiene una discontinuidad de segunda especie por la derecha en 0, ya que su límite lateral derecho en 0 no existe:

$$f(x)=\begin{cases}0 & si \quad x=1/n,\ con\ n\in Z^*\\ 1 & si \quad x\neq 1/n,\ con\ n\in Z^*\end{cases}$$



Observa que aplicando las definiciones vistas en el apartado anterior se obtienen las mismas conclusiones, salvo la clasificación de las discontinuidades.

* * *

[1] El nombre “evitable” hace referencia al hecho de que bastaría modificar solo ese punto de la gráfica para que esta fuese continua por la derecha en 0. En efecto, si trasladásemos el punto (0,0) a la posición que ocupa el punto (0,1), la función sería continua por la derecha en 0.
[2] El nombre de “salto infinito” se refiere al salto que habría que dar si se dibujase su gráfica.

El estudio de la continuidad lateral izquierda y la clasificación de las discontinuidades correspondientes se hacen de idéntica forma.

* * *

Vamos a estudiar, por ejemplo, la continuidad lateral[1] en los puntos 0, 2 y 3 de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \cos(1/x) & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 4/x & \text{si } 0<x\leq 2 \\ 1/(x-3) & \text{si } x>2 \end{cases}$$

El procedimiento consiste en utilizar la tabla vista al comienzo de este apartado y la correspondiente a la discontinuidad lateral izquierda.

Estudiemos cada uno de los puntos:

• f tiene una discontinuidad de segunda especie por la izquierda y una discontinuidad de salto infinito por la derecha en 0:

1º) f(0)=0.

2º) El límite lateral izquierdo de f en 0 no existe:

Dom(f)	Im(f)
$-1/\pi$	$f(-1/\pi)=\cos(-\pi)=-1$
$-1/(2\pi)$	$f(-1/(2\pi))=\cos(-2\pi)=1$
$-1/(3\pi)$	$f(-1/(3\pi))=\cos(-3\pi)=-1$
…	…
↓	↓
0	es oscilante

3º) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{4}{x}=\frac{4}{0^+}=+\infty$.

• f es continua por la izquierda y tiene una discontinuidad evitable por la derecha en 2:

1º) f(2)=4/2=2.

2º) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{4}{x}=2$.

3º) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{1}{x-3}=-1$.

• Como $3\notin \text{Dom}(f)$, no tiene sentido plantear el estudio de la continuidad lateral.

[1] El estudio de la continuidad lateral de una función en un punto incluye la clasificación de la discontinuidad en el caso de que la haya.

3.- Problemas

1) Estudia la continuidad lateral en -1 y 1 de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1} & \text{si } x\neq\pm1 \\ 0 & \text{si } x=\pm1 \end{cases}$$

2) Determina m y n para que la siguiente función sea continua por la izquierda y por la derecha en $-\pi/2$ y $\pi/2$:

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x\leq-\pi/2 \\ m\cdot\operatorname{sen} x+n & \text{si } -\pi/2<x<\pi/2 \\ 2\cdot\cos x & \text{si } x\geq\pi/2 \end{cases}$$

3) Halla a y b para que la siguiente función sea continua por la izquierda y por la derecha en 0 y 1:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\leq x\leq1 \\ 2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

4) Calcula a y b para que la siguiente función sea continua por la izquierda y por la derecha en 0 y, además, su gráfica pase por el punto (1,3):

$$f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si } x\leq0 \\ ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$$

5) Halla a y b para que la siguiente función sea continua por la izquierda y por la derecha en 1 y, además, su gráfica pase por el origen de coordenadas:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & \text{si } x\leq1 \\ \ln x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

6) Estudia la continuidad lateral en 2 de las siguientes funciones:

a) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-6x+8}{x-2} & \text{si } x\neq2 \\ -2 & \text{si } x=2 \end{cases}$$

b) $$f(x)=\begin{cases} \cos(\pi x) & \text{si } x\leq2 \\ \dfrac{\ln(x^2-3)}{x-2} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

7) Estudia la continuidad lateral en 0 de las siguientes funciones:

a) $$f(x)=\begin{cases} x^{1/x} & \text{si } x\neq0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

b) $$f(x)=\begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(1/x) & \text{si } x\neq0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

c) $$f(x)=\begin{cases} \cos(1/x) & \text{si } x<0 \\ 1-x-x^2 & \text{si } x\geq0 \end{cases}$$

d) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3-x}}{x} & \text{si } x<0 \\ \operatorname{arc\,tg}(x^2-1) & \text{si } x\geq0 \end{cases}$$

8) Estudia la continuidad lateral en 0 de la función:

$$f(x)=\begin{cases} e^{1/x}\cdot[2+\operatorname{sen}(1/x)] & \text{si } x\neq0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$