Índice: Continuidad de una función en un punto. Estudio de la continuidad de una función en un punto. Un caso especial de discontinuidad. Estudio de la continuidad de una función. Problemas.

1.- Continuidad de una función en un punto

Si $x_0 \in Dom(f)$, vamos a relacionar ahora el comportamiento de la función f en las proximidades de x_0 con el valor de la función en el punto, esto es, con $f(x_0)$. También aquí utilizaremos sucesiones.

Pues bien, si consideramos todas las sucesiones x_1, x_2, x_3,… contenidas en Dom(f) que tienden[1] a x_0, solo pueden darse dos casos:

1º) La función f transforma todas ellas en sucesiones que tienden a $f(x_0)$, en cuyo caso diremos que *f es continua en x_0:*

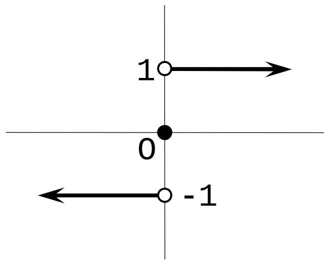
Dom(f)	Im(f)
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$
…	…
↓	↓
x_0	$f(x_0)$

2º) La función f no transforma todas ellas en sucesiones que tienden a $f(x_0)$, en cuyo caso diremos que *f es discontinua en x_0* o que *f tiene una discontinuidad en x_0*.

* * *

Consideremos, por ejemplo, la función signo:

$$Sig(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ 1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$



Es fácil ver que la función es continua en 2, ya que transforma todas las sucesiones de su dominio que tienden a 2 en sucesiones que tienden a f(2); y que lo mismo pasa en todos los puntos de su dominio, excepto en 0, en donde es discontinua. Observa que en este punto la función tiene dos discontinuidades laterales evitables. Sin embargo, no podemos llamarla así ahora, pues no basta modificar un punto para que la función se convierta en continua. Esta disconti-

[1] La diferencia con la definición de límite se debe a que ahora es fundamental lo que pase en x_0.

nuidad es, pues, esencial. Se llama discontinuidad de salto finito, y no podía darse al estudiar las discontinuidades laterales.

Como la vamos a necesitar, precisemos su definición:

Una función *f tiene una discontinuidad de salto finito en* x_0 si los límites laterales de f en x_0 son números distintos.

2.- Estudio de la continuidad de una función en un punto

El estudio de la continuidad[1] de una función en un punto de su dominio se reduce al de sus continuidades laterales.

En el siguiente cuadro de doble entrada aparecen en la primera columna y en la primera fila las distintas posibilidades que se pueden presentar al estudiar la continuidad lateral por la izquierda y por la derecha, respectivamente, de una función en un punto de su dominio[2]:

	C-D	**DE-D**	**DSI-D**	**DSE-D**
C-I	C	DE o DSF	DSI	DSE
DE-I	DE o DSF	DE o DSF	DSI	DSE
DSI-I	DSI	DSI	DSI	DSE
DSE-I	DSE	DSE	DSE	DSE

Es fácil apreciar la distinta “potencia” de las discontinuidades laterales. Así, la discontinuidad de segunda especie (DSE) es la más “potente” en el sentido de que basta que una función tenga en un punto de su dominio una discontinuidad lateral de segunda especie para que, pase lo que pase por el otro lado, la función tenga en ese punto una discontinuidad de segunda especie. La siguiente más “potente” es la discontinuidad de salto infinito (DSI). Después viene la discontinuidad evitable (DE), que da lugar a una doble posibilidad: DE y DSF. Para distinguirlas basta aplicar la definición de esta última discontinuidad que hemos visto en el apartado anterior. Por último, observa que una función es continua en un punto de su dominio si, y solamente si, es continua por la izquierda y por la derecha.

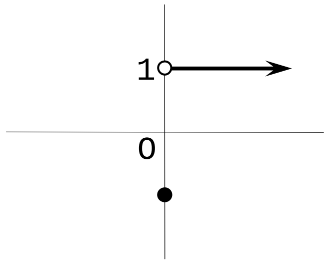
* * *

[1] Cuando se pide estudiar la continuidad de una función en un punto se sobrentiende que, si se trata de una discontinuidad, hay también que clasificarla.

[2] Para simplificar, utilizamos las siguientes siglas: C=Continua, DE=Discontinuidad evitable, DSF=Discontinuidad de salto finito, DSI=Discontinuidad de salto infinito y DSE=Discontinuidad de segunda especie. Cuando nos referimos a la continuidad lateral o a las discontinuidades laterales, añadimos un guion a las siglas anteriores y la letra I=Izquierda o D=Derecha.

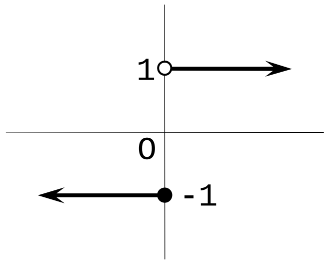
Por ejemplo, la siguiente función tiene una discontinuidad evitable[1] en 0:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x=0\\ 1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$



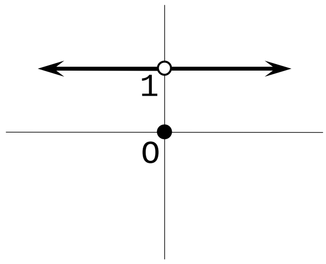
En cambio, la siguiente función tiene una discontinuidad de salto finito[2] en 0:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x\leq 0\\ 1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$



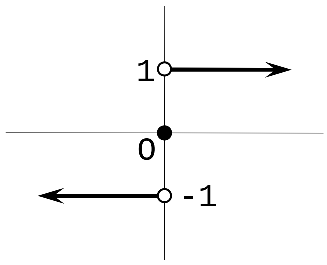
Por ejemplo, la siguiente función tiene una discontinuidad evitable[3] en 0:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x<0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\\ 1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$



Sin embargo, la función signo tiene una discontinuidad de salto finito[4] en 0:

$$\mathrm{Sig}(x)=\begin{cases}-1 & \text{si} \quad x<0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\\ 1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$



[1] Observa que esta función es continua por la izquierda y tiene una discontinuidad evitable por la derecha en 0.

[2] También esta función es continua por la izquierda y tiene una discontinuidad evitable por la derecha en 0. Pero, a diferencia de la anterior, los límites laterales en 0 son números distintos (en la anterior no tiene sentido plantear el límite lateral izquierdo en 0).

[3] Esta función tiene una discontinuidad evitable por la izquierda y otra igual por la derecha en 0.

[4] También esta tiene una discontinuidad evitable por la izquierda y otra igual por la derecha en 0. Pero, a diferencia de la anterior, los límites laterales en 0 son números distintos (en la anterior eran números iguales).

3.- Un caso especial de discontinuidad

Como vimos en la lección anterior, no tiene sentido plantearse el estudio de la continuidad lateral de una función en un punto que está fuera de su dominio.

Sin embargo, si $x_0 \notin Dom(f)$ y, además, tiene sentido plantear los dos límites laterales de f en x_0, entonces se considera que f es discontinua en x_0.

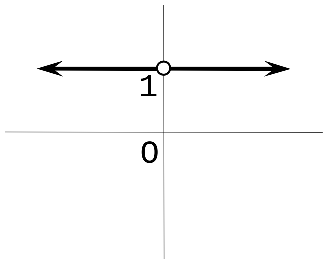
La clasificación de las discontinuidades en este caso viene recogida en el siguiente cuadro:

$x_0 \notin Dom(f)$		El límite lateral derecho de f en x_0		
		Es un número	Es infinito	No existe
El límite lateral izquierdo de f en x_0	Es un número	DE o DSF	DSI	DSE
	Es infinito	DSI	DSI	DSE
	No existe	DSE	DSE	DSE

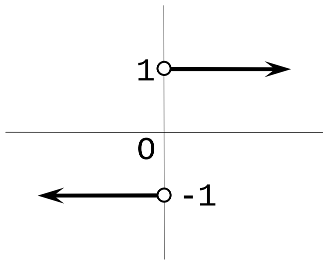
La distinción entre DE y DSF se hace, igual que en el apartado anterior, mediante la definición de esta última discontinuidad.

Por ejemplo, la función f tiene una discontinuidad evitable en 0, mientras que la g tiene una discontinuidad de salto finito:

Gráf(f)



Gráf(g)



* * *

Si $x_0 \notin Dom(f)$ y al menos uno de los límites laterales de la función f en x_0 no tiene sentido plantearlo, entonces tampoco tiene sentido plantearse la cuestión de si f es continua o discontinua en x_0.

Por ejemplo, no tiene sentido plantearse si la función $f(x)=\ln x$ es continua o discontinua en 0.

4.- Estudio de la continuidad de una función

Hasta aquí hemos estudiado la continuidad de una función en un punto concreto. Ahora vamos a hacerlo en todos aquellos en los que tenga sentido plantear dicha cuestión.

Esto se hace en tres pasos:

1º) Calcular Dom(f).

2º) Estudiar la continuidad en un punto genérico de su dominio.

3º) Estudiar en particular los puntos en los que puede darse una discontinuidad.

Normalmente el dominio de una función suele ser la unión de un número finito de intervalos. Necesitamos, pues, las siguientes definiciones:

- *La función f es continua en el intervalo abierto (a,b)* si lo es en todos sus puntos.
- *La función f es continua en el intervalo cerrado [a,b]* si lo es en (a,b), por la derecha en a y por la izquierda en b.
- *La función f es continua en el intervalo semiabierto*[1] *[a,b)* si lo es en (a,b) y por la derecha en a.

Por ejemplo, estudiemos la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-8} & \text{si} \quad x\le 0\\ 1/x & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

1º) Dom(f)=R.

2º) Como en este caso la función se comporta de diferente manera a izquierda y derecha de 0, es necesario estudiar por separado lo que le pasa en ambas zonas.

a) La función es continua[2] en $(-\infty,0)$, ya que si[3] $x_0<0$:

- $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0-8}$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{x-8}=\dfrac{1}{x_0-8}$.

b) La función es continua[2] en $(0,+\infty)$, ya que si $x_0>0$:

- $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0}$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x_0}$.

3º) La función tiene una discontinuidad de salto infinito en 0:

- $f(0)=-1/8$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{x-8}=-\dfrac{1}{8}$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$.

Como la función es continua por la izquierda en 0, entonces es continua en los intervalos $(-\infty,0]$ y $(0,+\infty)$.

---

[1] O semicerrado. Del mismo modo se define la continuidad en un intervalo del tipo (a,b].

[2] Ya que, como ambos límites laterales en x_0 coinciden con $f(x_0)$, es continua por la izquierda y por la derecha en x_0.

[3] x_0 es un punto genérico, pero el estudio de la continuidad es exactamente igual que si fuera un punto concreto.

5.- Problemas

1) Prueba que si f y g son continuas en x_0, también lo son:

a) $f+g$ **b)** $f-g$ **c)** $k\cdot f$

d) $f\cdot g$ **e)** f/g (si $g(x_0)\neq 0$) **f)** $|f|$

g) f^g (si $f(x_0)>0$) **h)** $g\circ f$ (si g es continua en $f(x_0)$)

2) Una sucesión[1], ¿es continua en x=1? ¿Y en su dominio?

3) Comprueba que las siguientes funciones son continuas en su dominio:

a) $f(x)=3x^2-6x$ **b)** $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{|x|-x}{2}$

d) $f(x)=x^{x-1}$ **e)** $f(x)=\sqrt{x-2}$ **f)** $f(x)=|x|+|x-2|$

4) Calcula f(0) para que sea continua la función $f(x)=\dfrac{5x^4-3x^3}{7x^5+3x^3}$.

5) Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^3-3x^2-4x}$

c) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-1\\ 1-|x| & \text{si } -1\leq x\leq 1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$ **d)** $f(x)=\begin{cases}4x/(x-2) & \text{si } x<-1\\ 6/(x-1) & \text{si } -1\leq x<3\\ 6x/(x+3) & \text{si } x>3\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} & \text{si } x\neq 5\\ \sqrt{5}/3 & \text{si } x=5\end{cases}$ **f)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+e^x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

g) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln(x-1)}$ **h)** $f(x)=\dfrac{1-2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$

i) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}(\pi/x) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ **j)** $f(x)=\begin{cases}x\cdot\operatorname{sen}(\pi/x) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

6) Estudia la continuidad de las funciones:

a) $y=\left|\dfrac{x-5}{x}\right|$ **b)** $y=\log\dfrac{1}{x}$ **c)** $y=\log\dfrac{1}{x^2}$

d) $y=\log\dfrac{-x}{(x-2)(x-3)}$ **e)** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4}}$ **f)** $y=|x^2-7x+10|$

g) $f(x)=\dfrac{1}{3^{1/x}+1}$ **h)** $f(x)=\dfrac{x}{3^{1/x}+1}$ **i)** $f(x)=1+2^{1/x}$

7) Estudia los puntos de discontinuidad y las asíntotas (indicando la posición relativa) de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x(x+1)}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2(x-2)}{x(x-2)^2}$ **c)** $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-x)}{x^3-x^2}$

8) Estudia la continuidad y las asíntotas de las funciones:

a) $f(x)=\arccos\dfrac{x}{x+2}$ **b)** $f(x)=\dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x^2-1)}{x^3-x}$ **c)** $f(x)=\log_x(x+1)$

---

[1] Recuerda que una sucesión es una función de dominio N*={1,2,3,…}.