Índice: Estudio de una función en el infinito. Problemas.

1.- Estudio de una función en el infinito

Supongamos[1] que tenga sentido plantear el límite de una función en $+\infty$. Si así fuese[2], lo primero que haremos es calcular dicho límite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=k$$

Pueden presentarse las siguientes situaciones:

1ª) No existe dicho límite. Es lo que ocurre, por ejemplo, con la función $f(x)=\operatorname{sen} x$.

2ª) k es un número real, en cuyo caso la recta de ecuación $y=k$ es la asíntota horizontal de f en $+\infty$, como ya sabemos. La posición relativa de la gráfica de la función con respecto a la asíntota la da el signo de la diferencia[3] $f(x)-k$. Si es positivo, la función se encuentra por encima de la asíntota, y si es negativo, por debajo.

3ª) k es infinito ($\pm\infty$).

Solo en este caso se prosigue el estudio que viene a continuación, pues es evidente que solo cuando k es infinito puede haber asíntotas oblicuas.

* * *

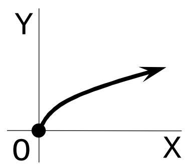
Lo primero que se hace es entonces calcular m:

$$m=\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Aquí pueden presentarse nada menos que cuatro situaciones:

1ª) No existe dicho límite. Es lo que ocurre, por ejemplo, con la función $f(x)=x\cdot(2+\operatorname{sen} x)$.

2ª) $m=0$, en cuyo caso diremos que la función f tiene en $+\infty$ una *rama parabólica en al dirección del eje OX*. Es lo que sucede, por ejemplo, con la parábola de eje horizontal $y=\sqrt{x}$. Observa que en este caso $k=+\infty$ y $m=0$.

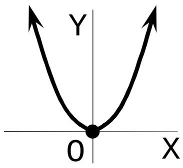


[1] Vamos a hacer el estudio en $+\infty$, pero lo mismo habrá que hacer en $-\infty$. En los problemas es normal estudiarlos conjuntamente.

[2] El cálculo del dominio de la función nos permite saber si tiene o no sentido plantear el límite en $+\infty$ y en $-\infty$.

[3] El límite de esa diferencia en $+\infty$ no es seguro que dé correctamente la posición relativa, pues, como ya hemos visto en las lecciones anteriores, el cálculo de límites consiste muchas veces en sustituir unas funciones por otras; y aunque el límite sea el mismo, puede ser diferente la posición relativa que aquí nos interesa calcular.

3ª) m es infinito ($\pm\infty$), en cuyo caso diremos que f tiene en $+\infty$ una *rama parabólica en la dirección del eje OY*. Es lo que sucede, por ejemplo, con la parábola de eje vertical $y=x^2$. Observa que en este caso k y m valen ambas $+\infty$.



4ª) m es un número real distinto de cero.

Solo en este caso se prosigue el estudio que viene a continuación, pues es evidente que solo cuando m es un número distinto de cero puede haber asíntota oblicua.

* * *

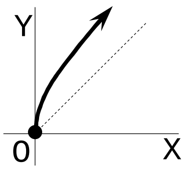
Para hallar su ecuación solo nos falta calcular b:

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]$$

Pero de nuevo se presentan tres posibles situaciones:

1ª) No exista dicho límite. Es lo que sucede, por ejemplo, con la función $f(x)=x+\operatorname{sen} x$.

2ª) m es infinito ($\pm\infty$), en cuyo caso diremos que f tiene en $+\infty$ una *rama parabólica en la dirección*[1] *de la recta y=mx*. Es lo que sucede, por ejemplo, con la parábola de eje oblicuo $y=x+\sqrt{x}$. Observa que en este caso $k=+\infty$, $m=1$ y $b=+\infty$.



3ª) m es un número real. En este caso la recta de ecuación $y=mx+b$ es la asíntota oblicua de f en $+\infty$.

La posición relativa de la gráfica de la función con respecto a la asíntota la da el signo de la diferencia[2] $f(x)-(mx+b)$. Allí donde sea positivo, la gráfica de f está por encima de la asíntota; y donde sea negativo, por debajo.

* * *

Por ejemplo, estudiemos el comportamiento de la siguiente función

[1] El nombre de ramas parabólicas en la dirección del eje OX, del eje OY o de una recta oblicua viene precisamente de que las funciones que las tienen se comportan como las parábolas de eje horizontal, vertical y oblicuo, respectivamente.

[2] El límite de esa diferencia en $+\infty$ no es seguro que dé correctamente la posición relativa por la misma razón que se indicó antes.

en el infinito:

$$f(x)=\frac{2x^2+4x-1}{x^2+x}$$

Primero calculamos k:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+4x-1}{x^2+x} \overset{1}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 2 = 2$$

La recta y=2 es la asíntota horizontal de la función f en $+\infty$ y en $-\infty$.

Veamos la posición relativa:

$$f(x)-k=\frac{2x^2+4x-1}{x^2+x}-2=\frac{2x^2+4x-1-2x^2-2x}{x^2+x}=\frac{2x-1}{x^2+x}=\frac{2(x-1/2)}{x(x+1)}$$

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ & -1 & & 0 & & 1/2 & \end{array}$$

Por tanto, la función está por encima de la asíntota en $+\infty$ y por debajo en $-\infty$.

* * *

Veamos otro ejemplo. Estudiemos el comportamiento de la siguiente función en el infinito:

$$f(x)=\sqrt{x^2-x}$$

Primero calculamos[2] k:

$$k = \lim_{x\to+\infty} f(x)= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \left(x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = +\infty\cdot\sqrt{1-0} = +\infty$$

Como esta función no tiene asíntotas horizontales, calculamos m:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt{1-1/x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \sqrt{1-0} = 1$$

Calculamos b:

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-x}-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x\cdot(\sqrt{1-1/x}+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-1/x}+1} = \frac{-1}{\sqrt{1-0}+1} = -1/2$$

La recta y=x-1/2 es la asíntota oblicua de la función en $+\infty$.

Para estudiar la posición relativa de la función y la asíntota que hemos hallado, damos a x un valor “grande”, por ejemplo x=100, y

---

[1] $2x^2+4x-1\sim 2x^2$ y $x^2+x\sim x^2$ en $+\infty$ y en $-\infty$. Ver el problema 6 de la lección 9.

[2] Como el dominio de la función es $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, tiene sentido plantear los dos límites en el infinito. Nos reduciremos al estudio de la función en $+\infty$. El estudio en $-\infty$ queda como ejercicio.

calculamos f(100)-100+1/2. Como sale negativo, estamos casi seguros de que la gráfica de la función está por debajo de la asíntota en $+\infty$. La certeza es absoluta si razonamos así:

$$f(x)-(x-1/2) \overset{1}{=} \sqrt{x^2-x}-\sqrt{(x-1/2)^2} = \sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-x+1/4} \overset{2}{<} 0$$

Por tanto, la función está por debajo de la asíntota en $+\infty$.

2.- Problemas

1) Calcula las ramas y asíntotas (indicando en este caso la posición relativa) de las funciones:

a) $f(x)=x^3-3x^2$ **b)** $f(x)=(x-1)^3$ **c)** $f(x)=\frac{4x}{x^2+4}$

d) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ **e)** $f(x)=\frac{x^2-1}{x-2}$ **f)** $f(x)=\sqrt{x-1}$

g) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ **h)** $f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{x-2}$ **i)** $f(x)=\sqrt{x^2+4x+1}$

j) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{\sqrt{x}}$ **k)** $f(x)=\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)^{8-x}$ **l)** $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x-3}$

2) Determina el valor de k si la función f tiene como asíntota oblicua la recta de ecuación y=-2x+2. Estudia si la gráfica de dicha función corta a la asíntota y estudia la posición relativa:

$$f(x)=\frac{kx^2+1}{x+1}$$

3) Halla el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln\frac{x+1}{2x}$ **b)** $f(x)=e^{x^2/(x^2-1)}$ **c)** $f(x)=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

d) $f(x)=x\cdot\ln\frac{ex}{1+x}$ **e)** $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x-2}-1}{\sqrt{x^2-9}}$ **f)** $f(x)=e^{1/x}$

g) $f(x)=\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^{x-3}$ **h)** $f(x)=\log_{x+3}x^2$ **i)** $f(x)=\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-x}}$

[1] Ya que x-1/2>0 en $+\infty$.
[2] Ya que el segundo radicando es mayor que el primero.