Índice: Infinitésimos e infinitos. Infinitésimos y funciones acotadas. Funciones equivalentes. Sustitución de funciones equivalentes. Problemas.

1.- Infinitésimos e infinitos

Si repasas la tabla de las expresiones indeterminadas, verás que en todas ellas aparece el cero, el infinito o ambos. Pongámosles nombre:

Si x_0 es un número real, $+\infty$ o $-\infty$:

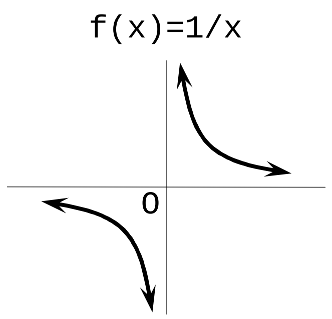
$$f \text{ es } \textit{infinitésimo en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

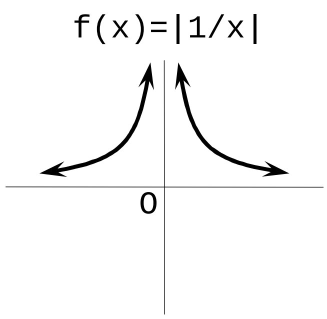
$$f \text{ es } \textit{infinito en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)|=+\infty$$

Por ejemplo, la función $f(x)=1/x$ es infinito en 0 e infinitésimo en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$\lim_{x\to 0} |1/x| \overset{1}{=} |1/0^{\pm}|=+\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} (1/x)=1/-\infty=0 \qquad \lim_{x\to +\infty} (1/x)=1/+\infty=0$$

Observa que si en la definición de infinito no apareciese el valor absoluto, el primero de estos tres límites no existiría:





* * *

Del mismo modo se definen los infinitésimos por la izquierda y por la derecha en x_0 (aquí, claro está, x_0 es un número real, pues se trata de límites laterales).

Por ejemplo, la función $f(x)=1/\ln x$ es un infinitésimo por la derecha en 0:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Dado que el dominio de esta función es $(0,+\infty)$, el límite en 0 coincide con el límite lateral derecho y, por tanto, también es un infinitésimo en 0.

[1] Se trata del límite de una composición $g(f(x))$, donde $f(x)=1/x$ y $g(x)=|x|$. Si se puede hacer el cálculo directo como en este caso, no hay inconveniente siempre que se sepa lo que se está haciendo.

Otro ejemplo. La función $f(x)=(1+x)^{1/x^2}$ es infinitésimo por la izquierda e infinito[1] por la derecha en 0:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1+x)^{1/x^2} \overset{2}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}\cdot(1+x-1)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}} = e^{1/0^-} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1+x)^{1/x^2} \overset{2}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\cdot(1+x-1)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}} = e^{1/0^+} = e^{+\infty} = +\infty$$

2.- Infinitésimos y funciones acotadas

Para el cálculo de algunos límites es importante la siguiente propiedad, que no demostraremos:

El producto de un infinitésimo en x_0 por una función acotada[3] es un infinitésimo en x_0. Esto es:

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} f(x)=0 \text{ y } g \text{ es una función acotada} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$$

Consideremos, por ejemplo, el siguiente límite:

$$\lim_{x\to +\infty}[\operatorname{sen}(1/x)\cdot \operatorname{sen} x]$$

El primer factor es un infinitésimo en $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty}\operatorname{sen}(1/x) \overset{4}{=} \operatorname{sen} 0 = 0$$

El límite del segundo factor, sin embargo, no existe:

Dom(f)	Im(f)
$\pi/2$	$\operatorname{sen}(\pi/2)=1$
$3\pi/2$	$\operatorname{sen}(3\pi/2)=-1$
$5\pi/2$	$\operatorname{sen}(5\pi/2)=1$
…	…
$\downarrow$	$\downarrow$
$+\infty$	oscilante

Ahora bien, la función seno está acotada entre -1 y 1. Por tanto:

$$\lim_{x\to +\infty}[\operatorname{sen}(1/x)\cdot \operatorname{sen} x] = 0$$

[1] Como una función potencial-exponencial es positiva, no es necesario poner valor absoluto.
[2] Ya que sale la indeterminación $1^{\pm\infty}$.
[3] Recuerda que una función está *acotada* si lo está superior e inferiormente; que una función está *acotada superiormente* por el número y_0 si su gráfica no se encuentra por encima de la recta $y=y_0$; y que una función está *acotada inferiormente* por el número y_0 si su gráfica no se encuentra por debajo de la recta $y=y_0$.
[4] Ya que se verifica la segunda condición del límite de la composición de funciones.

3.- Funciones equivalentes

Dos funciones, f y g, son *equivalentes en x_0*, y se escribe "f~g en x_0", si el límite de su cociente en x_0 es 1:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

Por ejemplo, $3x^2-2x+6\sim 3x^2$ en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+6}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\left(3-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}}{3} = \frac{3-0+0}{3} = 1$$

Por ejemplo, $\sqrt{1+x}-1\sim x/2$ en 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x/2} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(\sqrt{1+x}-1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(1+x-1)}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

4.- Sustitución de funciones equivalentes

El concepto de equivalencia de funciones solo tiene interés cuando se trata de infinitos o infinitésimos, pues permite simplificar el cálculo de algunos límites cuando se utiliza la siguiente propiedad:

Si f y g son dos funciones equivalentes en x_0 y una de ellas aparece como *factor* o *divisor* en el cálculo de un límite en x_0, entonces se puede sustituir por la otra:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot h(x)] = \lim_{x\to x_0}[g(x)\cdot h(x)]$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}$$

La demostración de esta propiedad es la siguiente:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot h(x)] \overset{2}{=} \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\cdot h(x)\right] =$$

$$\overset{3}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}[g(x)\cdot h(x)] \overset{4}{=} 1\cdot\lim_{x\to x_0}[g(x)\cdot h(x)] = \lim_{x\to x_0}[g(x)\cdot h(x)]$$

Del mismo modo se demuestra la segunda fórmula.

---

[1] También puede hacerse con el cambio de variable $1+x=y^2 \Leftrightarrow x=y^2-1$.
[2] Multiplicamos y dividimos por g(x).
[3] El límite de un producto es igual al producto de los límites de los factores.
[4] Ya que f~g en x_0.

5.- Problemas

1) Define: a) infinitésimos laterales; b) infinitos laterales.

2) A la vista de sus gráficas, indica en qué puntos son infinitésimos o infinitos las siguientes funciones:

a) $y=e^x$	**b)** $y=\ln x$	**c)** $y=\operatorname{sen} x$
d) $y=\cos x$	**e)** $y=\operatorname{tg} x$	**f)** $y=\operatorname{cosec} x$
g) $y=\sec x$	**h)** $y=\operatorname{ctg} x$	**i)** $y=\operatorname{arc\,sen} x$
j) $y=\operatorname{arc\,cos} x$	**k)** $y=\operatorname{arc\,tg} x$	**l)** $y=\operatorname{arc\,cosec} x$
m) $y=\operatorname{arc\,sec} x$	**n)** $y=\operatorname{arc\,ctg} x$	**ñ)** $(1/3)^x$

3) Prueba[1] que si $f(x)$ es un infinitésimo en x_0, también son infinitésimos en x_0 las funciones:

a) $\operatorname{sen} f(x)$	**b)** $\operatorname{tg} f(x)$	**c)** $\operatorname{arc\,sen} f(x)$
d) $\operatorname{arc\,tg} f(x)$	**e)** $\ln[1+f(x)]$	**f)** $e^{f(x)}-1$

4) Halla el límite en $+\infty$ de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{\cos x}{\ln x}$	**b)** $y=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	**c)** $y=x^3-\operatorname{sen} x$
d) $y=\dfrac{2x+\operatorname{sen} x}{x}$	**e)** $y=\dfrac{\cos x}{x+8}$	**f)** $y=\dfrac{e^x+\operatorname{sen} x}{e^x+\cos x}$
g) $y=\dfrac{x-\cos x}{x+\operatorname{sen} x}$	**h)** $y=\dfrac{\ln x-\operatorname{sen} x}{\ln x+\cos x}$	**i)** $y=\dfrac{x-\cos x}{x}$
j) $y=\dfrac{\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\sqrt{x+2}}$	**k)** $y=\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$	**l)** $y=\dfrac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{\ln x}$

5) Prueba que si $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=1$.

6) Prueba que si f y g son dos funciones equivalentes en x_0 y una de ellas aparece como divisor en el cálculo de un límite en x_0, se puede sustituir por la otra.

7) Si $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, prueba que $P(x)\sim a_nx^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

8) Si $P(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, prueba que $P(x)\sim a_1x$ en 0.

[1] Si utilizas el límite de la composición, indica la condición que se cumple en cada caso.