Índice: Infinitésimos equivalentes. Un límite especial. Generalización. Problemas.

1.- Infinitésimos equivalentes

Por su interés en el cálculo de algunos límites, recogemos en una tabla las equivalencias entre infinitésimos[1] más usadas:

Si f es un infinitésimo en x_0	CASO PARTICULAR: f(x)=x
$\operatorname{sen} f(x) \sim f(x)$ en x_0	$\operatorname{sen} x \sim x$ en 0
$\operatorname{tg} f(x) \sim f(x)$ en x_0	$\operatorname{tg} x \sim x$ en 0
$\operatorname{arc\,sen} f(x) \sim f(x)$ en x_0	$\operatorname{arc\,sen} x \sim x$ en 0
$\operatorname{arc\,tg} f(x) \sim f(x)$ en x_0	$\operatorname{arc\,tg} x \sim x$ en 0
$\ln[1+f(x)] \sim f(x)$ en x_0	$\ln(1+x) \sim x$ en 0
$e^{f(x)}-1 \sim f(x)$ en x_0	$e^x-1 \sim x$ en 0

Las demostraciones de las dos primeras equivalencias de la tabla, que aparecen resaltadas, se harán en los apartados siguientes. Las demás se dejan para los problemas.

Una vez demostrada la tabla, y teniendo en cuenta la propiedad de sustitución de funciones equivalentes vista en la lección anterior, se podrán calcular límites como el siguiente:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{tg}(x^2-9)}{\operatorname{sen}(x-3)} \overset{2}{=} \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\cdot(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} (x+3) = 6$$

Para poder sustituir las funciones $\operatorname{tg}(x^2-9)$ y $\operatorname{sen}(x-3)$ por x^2-9 y $x-3$, respectivamente, tenemos que probar que estas últimas son infinitésimos en 3 (como se indica en el encabezado de la tabla).

2.- Un límite especial

Vamos a demostrar que $\operatorname{sen} x \sim x$ en 0. Por tanto, tenemos que probar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

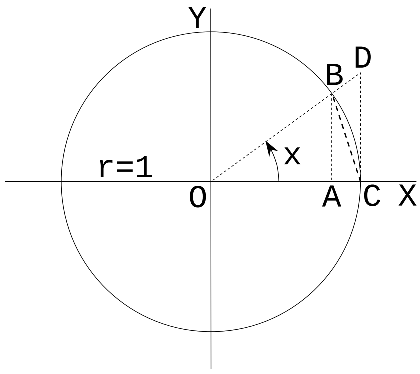
Hallemos primero el límite lateral derecho. Como en este límite $x>0$, hemos dibujado el ángulo de x radianes[3] en el primer cuadrante

[1] Ya se vio en el problema 3 de la lección anterior que si f(x) es un infinitésimo en x_0, entonces las funciones $\operatorname{sen} f(x)$, $\operatorname{tg} f(x)$, $\operatorname{arc\,sen} f(x)$, $\operatorname{arc\,tg} f(x)$, $\ln[1+f(x)]$ y $e^{f(x)}-1$ son infinitésimos en x_0.

[2] $\operatorname{tg}(x^2-9) \sim x^2-9$ en 3 y $\operatorname{sen}(x-3) \sim x-3$ en 3.

[3] Recuerda que en las funciones trigonométricas el ángulo se mide en radianes.

de la *circunferencia unidad*:



Como OB=OC=r=1, resulta que $\operatorname{sen} x = AB$ y $\operatorname{tg} x = CD$. Además, es evidente la siguiente cadena de desigualdades:

Área del triángulo OCB ≤ área del sector circular OCB ≤
≤ área del triángulo OCD

Recordemos que el área del sector circular se obtiene de una simple regla de tres. El área A del sector OBC es a x radianes como el área de todo el círculo es a 2π radianes:

$$\frac{A}{x} = \frac{\pi r^2}{2\pi} \Rightarrow A = \frac{x r^2}{2}$$

Por tanto, la cadena de desigualdades anterior queda así:

$$\frac{1}{2} \cdot OC \cdot AB \leq \frac{1}{2} \cdot x r^2 \leq \frac{1}{2} \cdot OC \cdot CD$$

Multiplicando por 2 y teniendo en cuenta que OC=r=1, queda:

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x$$

Como $\operatorname{sen} x > 0$, ya que x está en el primer cuadrante, se puede dividir por $\operatorname{sen} x$:

$$1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

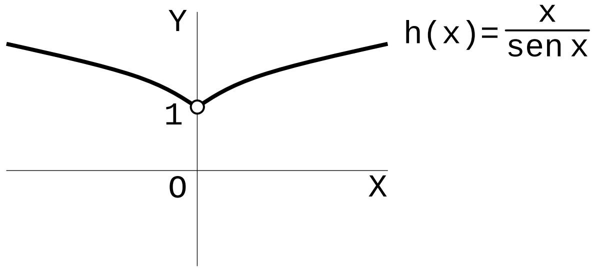
Ahora bien:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1 = 1 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\cos x} = 1$$

Por tanto, por la regla del sandwich:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

Por otro lado, el límite lateral izquierdo en 0 también es 1 al ser $f(x)=x/\operatorname{sen} x$ una función par[1]:



Como los dos límites laterales valen 1, $\operatorname{sen} x \sim x$ en 0.

3.- Generalización

Vamos a generalizar el caso anterior, esto es, vamos a probar que si $f(x)$ es un infinitésimo en x_0, entonces $\operatorname{sen} f(x) \sim f(x)$ en x_0:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} \overset{2}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \overset{3}{=} 1$$

* * *

Nota:

Quizá extrañe que se diga en la nota a pie de página que se trata de una composición de funciones cuando lo que tenemos es el límite de un cociente. Sin embargo, consideremos la función[4]:

$$g(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Entonces:

$$g(f(x))=\frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} g(f(x)) \overset{5}{=} \lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}$$

Había, pues, una composición de funciones *camuflada*. En consecuen-

[1] Recuerda de cursos anteriores que una función es par si su gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas. Para que una función sea par se requiere: 1º) que su dominio sea simétrico respecto del origen de coordenadas y 2º) que $f(-x)=f(x)$. Nuestra función cumple ambas propiedades.
[2] Hacemos el cambio $f(x)=y$. Recuerda que en eso consistía precisamente el límite de la composición de funciones. Una explicación más detallada de este paso aparece en la NOTA del texto.
[3] Ya que $\operatorname{sen} x \sim x$ en $x=0$. La letra que se utilice como variable independiente no tiene la menor importancia. Así, las funciones $f(x)=x^2-x$ y $f(y)=y^2-y$ son la misma función.
[4] Observa que es, salvo la letra de la variable, la misma función que aparece después de hacer el cambio de variable $f(x)=y$.
[5] Ya que se cumple la tercera condición del límite de la composición. Observa que $f(x)\neq 0$ en el dominio de la función $g\circ f$, ya que $f(x)$ aparece en el denominador de dicha función (suponemos, claro está, que tiene sentido el límite que estamos calculando).

cia, es correcto lo que hemos hecho, aunque nos hayamos saltado algunos pasos. Esto corrobora lo que se dice en la teoría de que el límite de la composición equivale al cambio de variable f(x)=y, lo que permite desentenderse de la composición, como aquí hemos hecho y como haremos a partir de ahora.

3.- Problemas

1) Prueba que[1]:

a) $\operatorname{tg} x \sim x$ en 0 **b)** $\operatorname{arc\,sen} x \sim x$ en 0 **c)** $\operatorname{arc\,tg} x \sim x$ en 0

d) $\ln(1+x) \sim x$ en 0 **e)** $e^x-1 \sim x$ en 0

2) Si f(x) es un infinitésimo en x_0 ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$), prueba que los infinitésimos $\operatorname{tg} f(x)$, $\operatorname{arc\,sen} f(x)$, $\operatorname{arc\,tg} f(x)$, $\ln[1+f(x)]$ y $e^{f(x)}-1$ son equivalentes a f(x) en x_0.

3) Demuestra la siguiente tabla de equivalencias[2]:

Si f es un infinitésimo en x_0	CASO PARTICULAR: f(x)=x
$1-\cos f(x) \sim [f(x)]^2/2$ en x_0	$1-\cos x \sim x^2/2$ en 0
$[1+f(x)]^n-1 \sim n\cdot f(x)$ en x_0	$(1+x)^n-1 \sim n\cdot x$ en 0
$\sqrt[n]{1+f(x)}-1 \sim f(x)/n$ en x_0	$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim x/n$ en 0

4) Calcula los límites en 0 de las funciones siguientes:

a) $y=\dfrac{1-\cos^2 x}{x}$ **b)** $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ **c)** $y=\dfrac{x\cdot \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

d) $y=\dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{x}$ **e)** $y=[\cos x]^{1/x^2}$ **f)** $y=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$

g) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$ **h)** $y=x\cdot \operatorname{ctg}(2x)$ **i)** $y=\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

j) $y=\dfrac{\operatorname{sen} x(1+\cos x)}{x\cdot \cos x}$ **k)** $y=(\cos(2x))^{3/x^2}$ **l)** $y=\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x}$

m) $y=\dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$ **n)** $y=(1+\operatorname{sen} x)^{1/x}$ **ñ)** $y=x\cdot \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

o) $y=\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$ **p)** $y=\dfrac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x-\operatorname{tg} x}$ **q)** $y=\dfrac{(1+2x)^{10}-1}{x^2+x}$

5) Halla los límites de las siguientes funciones en los extremos de los intervalos que constituyen sus dominios:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x}{e^{1/x}+3}$ **c)** $f(x)=\ln\dfrac{x-2}{x+3}$

[1] El apartado b) se hace por el cambio de variable x=seny; el c), por el cambio x=tgy; y el e), por el cambio x=ln(1+y).
[2] Empieza por la segunda columna. La segunda de las equivalencias se demuestra con el cambio de variable $1+x=y \Leftrightarrow x=y-1$; y la tercera, con el cambio $1+x=y^n \Leftrightarrow x=y^n-1$.