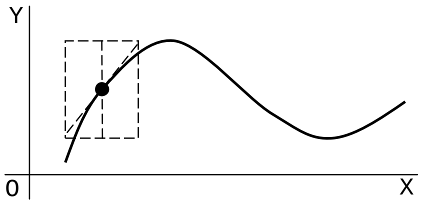
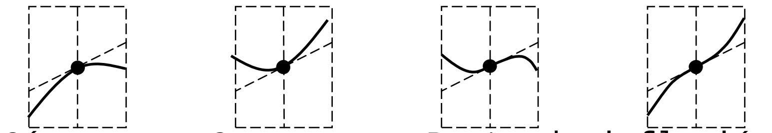
Índice: Introducción. Los conceptos básicos. El método. Problemas.

1.- Introducción

Supongamos que la cartulina utilizada en el estudio de la monotonía y los extremos tuviese ahora la propiedad de que, al colocarla sobre el punto de la gráfica que se va a estudiar, su eje horizontal adoptara la posición de la recta tangente a la gráfica en dicho punto.[1] Es fácil ver que se presentan cuatro casos,[2] mutuamente excluyentes, según en qué par de los *nuevos cuadrantes* de la cartulina se encuentre la gráfica de la función:[3]

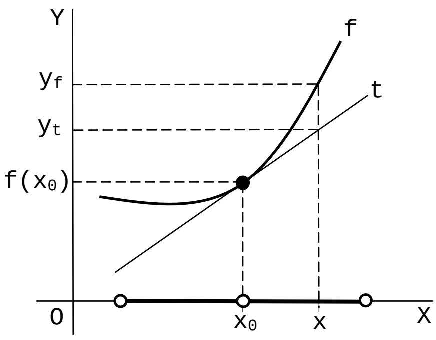


Según sea el caso, diremos que en ese punto la función es cóncava, es convexa o tiene un punto de inflexión:[4]



2.- Los conceptos básicos

Para averiguar en qué situación de las cuatro nos encontramos, basta conocer la posición relativa de la gráfica de la función con respecto a la recta tangente, esto es, basta saber el signo de la función auxiliar $G(x)=y_f-y_t$ en las proximidades de x_0:



[1] Estamos suponiendo, pues, que dicha recta existe.
[2] No estudiaremos los demás casos posibles.
[3] Por tanto, suponemos definida la función en un entorno del punto.
[4] Las palabras *cóncava* y *convexa* son relativas al punto de vista que se adopte. Nosotros miramos la gráfica desde abajo.

Ahora bien, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x_0 es $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Por tanto,[1] $G(x)=y_f-y_t=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Esta función permite definir los conceptos básicos como sigue:[2]

1º) La función f es *cóncava en x_0* si existe un entorno reducido de dicho punto en el que $G(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ es negativa.

2º) La función f es *convexa en x_0* si existe un entorno reducido de dicho punto en el que $G(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ es positiva.

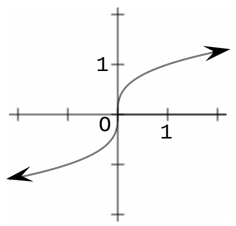
3º) La función f tiene un *punto de inflexión en x_0* si existe un entorno reducido de dicho punto en el que $G(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ tiene signos distintos a izquierda y derecha de x_0.

* * *

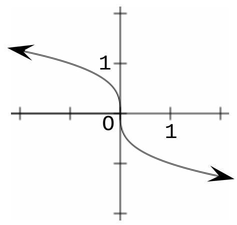
Cuando la recta tangente a la gráfica de la función f en x_0 es vertical, se considera que la función tiene también un punto de inflexión si $f'_-(0)=f'_+(0)=-\infty$ o $f'_-(0)=f'_+(0)=+\infty$.

Por ejemplo, las funciones $f(x)=\sqrt[3]{x}$ y $g(x)=-\sqrt[3]{x}$ tienen un punto de inflexión en x=0, ya que $f'_-(0)=f'_+(0)=+\infty$ y $g'_-(0)=g'_+(0)=-\infty$:

Gráf(f)

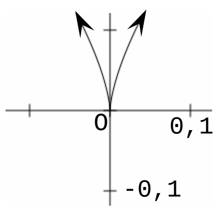


Gráf(g)

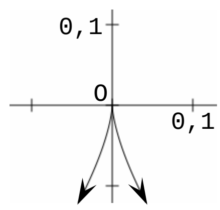


Sin embargo, las funciones $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ y $g(x)=-\sqrt[3]{x^2}$ no tienen un punto de inflexión en x=0, sino, como recordarás, un punto de retroceso, ya que $f'_-(0)=-\infty$, $f'_+(0)=+\infty$, $g'_-(0)=+\infty$ y $g'_+(0)=-\infty$:

Gráf(f)



Gráf(g)



* * *

Una función es *cóncava en un intervalo (a,b)* si lo es en todos sus puntos.

Una función es *convexa en un intervalo (a,b)* si lo es en todos sus puntos.

---

[1] Observa que G(x)=g(x) en los puntos singulares o críticos de la función.

[2] En las definiciones, aunque no se dice explícitamente, es evidente que la función f debe estar definida en un entorno de x_0 y ser derivable en dicho punto.

Se llama *tangente de inflexión* a la recta tangente en el punto de inflexión.

3.- El método

El método que vamos a usar para estudiar el comportamiento[1] de una función f en un punto x_0 de su dominio se basa en las propiedades de la función $G(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)$, que son las siguientes:

1ª) $G(x_0)=0$.

2ª) $G'(x)=f'(x)-f'(x_0)$; $G'(x_0)=0$.

3ª) $G''(x)=f''(x)$, $G'''(x)=f'''(x)$, etc.[2]

* * *

De estas propiedades se deduce[3] con facilidad que el comportamiento de la función f en x_0 coincide con el de G. En efecto:

- Como $G(x_0)=0$, $(x_0,0)\in \text{Gráf}(G)$.
- Como $G'(x_0)=0$, la recta tangente a la gráfica de la función G en el punto $(x_0,0)$ es el eje de abscisas.

Por tanto, si G fuese convexa en x_0, su gráfica se encontraría por encima del eje de abscisas a ambos lados de dicho punto, esto es, su signo sería positivo en un entorno reducido de x_0; pero eso significa (ver la definición) que f también es convexa en x_0. Y lo mismo sucede en los demás casos.

* * *

Como el comportamiento de la función f en x_0 es el mismo que el de G, basta con que estudiemos esta última función. Y esto lo haremos en dos pasos:

1º) Señalaremos gráficamente lo que en cada caso conozcamos de la función G y sus derivadas.

2º) Deduciremos de ello el comportamiento de G en x_0; y, puesto que es el mismo, el de f.

* * *

En las dos lecciones siguientes demostraremos mediante este método los criterios que nos van a permitir estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de una función.[4]

---

[1] La palabra *comportamiento* se refiere aquí a la *curvatura* (concavidad y convexidad) y a los puntos de inflexión.
[2] Suponemos, pues, que f es tantas veces derivable como sea necesario.
[3] Puedes intentar la demostración por tu cuenta. Basta que hagas el primer ejercicio contenido en *Ejercicio 6.2* (ver *Resúmenes*, en este mismo *blog*).
[4] Si no fuera posible aplicar estos criterios, se utilizarán directamente las definiciones. En particular, si una función no es derivable en un punto, analizaremos si se trata de un punto de inflexión, un punto de retroceso o un punto anguloso.

4.- Problemas

1) Averigua si el origen de coordenadas es un punto de inflexión, un punto de retroceso o un punto anguloso en los siguientes casos:

a) $y=|\operatorname{arc\,tg} x|$ **b)** $y=\sqrt[6]{x^2}$ **c)** $y=x^{3/5}$

2) De todos[1] los cilindros de 36 cm³ de volumen, calcula las dimensiones que tiene el de área total mínima.

3) Halla la longitud de una cuerda de circunferencia de 2 cm de radio, de modo que al girar 360º alrededor del diámetro paralelo a ella engendra una superficie de área máxima.

4) Halla las dimensiones del cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

5) Un triángulo rectángulo gira 360º alrededor de uno de sus catetos. Determina el volumen máximo que puede engendrar en cada uno de los dos casos siguientes: a) la suma de los dos catetos es de 10 cm; b) la hipotenusa mide 9 cm.

6) Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué valor debe tener su base para que el volumen del cono sea máximo?

7) ¿Cuál es el ángulo del sector circular de radio R con el que se puede obtener al enrollarlo un embudo de capacidad máxima?

8) Un hombre se encuentra en una lancha en P, que dista 9 km del punto A más próximo de una costa rectilínea AB. Desea ir a B, que dista 15 km de A, en el menor tiempo posible. Si puede navegar a 4 km/h y andar a 5 km/h, ¿en qué punto de la costa debe desembarcar?

9) A las nueve de la mañana el barco B está 65 millas al este del barco A. B navega hacia el oeste a 10 millas/h y A hacia el sur a 15 millas/h. ¿Cuándo estarán más próximos uno del otro y cuál es esa distancia?

[1] Seguimos con los problemas de optimación de funciones.