Índice: Criterio de la derivada segunda. Criterio de la derivada tercera. Criterio de la derivada enésima. Problemas.

1.- Criterio de la derivada segunda

Si f' está definida en un entorno de x_0 y $f''(x_0)\neq 0$, entonces:

a) $f''(x_0)>0$ implica que f es convexa en x_0.

b) $f''(x_0)<0$ implica que f es cóncava en x_0.

* * *

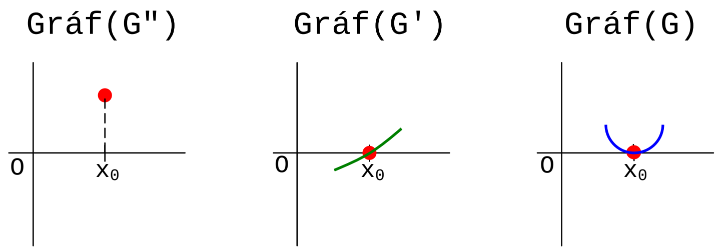
Demostremos,[1] por ejemplo, el primer apartado.

1º) Señalamos en rojo lo que conocemos de la función G y sus derivadas:[2]

- Como $G(x_0)=0$, $(x_0,0)\in$ Gráf(G).
- Como $G'(x_0)=0$, $(x_0,0)\in$ Gráf(G').
- Como $G''(x_0)=f''(x_0)>0$, $(x_0,f''(x_0))\in$ Gráf(G").

2º) Deducimos el comportamiento de G en x_0:

- Como $G''(x_0)>0$, podemos[3] dibujar (verde) la gráfica de la función G', pues sabemos que es creciente en x_0.
- Como G' es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de x_0, G decrece a la izquierda y crece a la derecha de dicho punto; y como es continua en x_0 (por ser derivable), teniendo en cuenta que la tangente a la gráfica de G en dicho punto es el eje de abscisas por ser $G'(x_0)=0$, podemos dibujar su gráfica (azul) en un entorno de x_0.



CONCLUSIÓN: la función G es convexa[4] en x_0. Por tanto, f también.

* * *

Para estudiar la curvatura de una función bastará, pues, con estudiar el signo de la derivada segunda. Allí donde ésta sea positiva, la función será convexa; y donde sea negativa, cóncava.

---

[1] Puedes intentarlo por tu cuenta. Basta que hagas los casos 1) y 2) del EJERCICIO 2 contenido en *Ejercicio 6.2* (ver *Resúmenes*, en este mismo *blog*).
[2] Recuerda las propiedades de la función G.
[3] Como f' está definida en un entorno de x_0, G' también, ya que Dom(G')=Dom(f').
[4] Para indicar que la función G es *convexa en* x_0 se ha dibujado su gráfica *convexa en un entorno de* x_0, que es lo que suele pasar normalmente con las funciones que se estudian en bachillerato. Ahora bien, esto no tiene por qué ser así, pero su justificación se sale del programa de este curso. (Esta nota es de aplicación siempre que se produzca la misma situación. Por tanto, no la repetiremos cada vez que ésta se presente.)

* * *

Por ejemplo, analicemos la curvatura de la función $f(x)=3x^5-5x^4+10$.

Tenemos que averiguar el signo de la derivada segunda:

$$f'(x)=15x^4-20x^3 \Rightarrow f''(x)=60x^3-60x^2=60x^2(x-1)$$

Intervalos	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
f" es	-	-	+
f es	cóncava	cóncava	convexa

Sólo nos quedan por estudiar los puntos $x=0$ y $x=1$, en los que se anula la derivada segunda. Pero para eso necesitamos del siguiente criterio.

2.- Criterio de la derivada tercera

Si $f''(x_0)=0$, f" está definida en un entorno de x_0 y $f'''(x_0)\neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0.

* * *

Demostremos,[1] por ejemplo, el caso en el que $f'''(x_0)>0$.

1º) Señalamos en rojo lo que conocemos de la función G y sus derivadas:

- Como $G(x_0)=0$, $(x_0,0)\in$ Gráf(G).
- Como $G'(x_0)=0$, $(x_0,0)\in$ Gráf(G').
- Como $G''(x_0)=f''(x_0)=0$, $(x_0,0)\in$ Gráf(G").
- Como $G'''(x_0)=f'''(x_0)>0$, $(x_0,f'''(x_0))\in$ Gráf(G"').

2º) Deducimos el comportamiento de G en x_0:

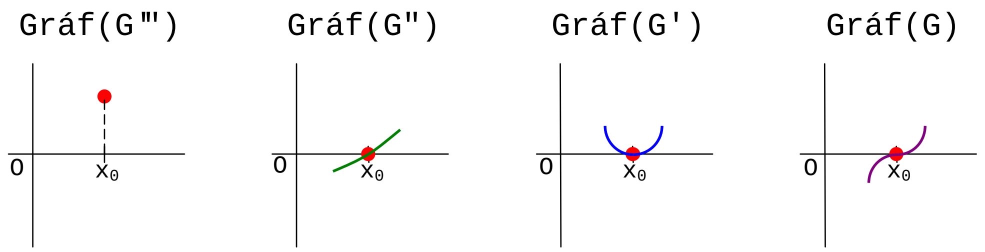
• Como $G'''(x_0)>0$, podemos[2] dibujar (verde) la gráfica de G", pues sabemos que es creciente en x_0.

• Como G" es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de x_0, G' decrece a la izquierda y crece a la derecha de dicho punto; y como es continua en x_0 (por ser derivable), podemos dibujar su gráfica[3] (azul) en las proximidades de x_0.

• Como G' es positiva a izquierda y derecha de x_0, G crece a ambos lados de dicho punto; y como es continua en x_0 (por ser derivable), teniendo en cuenta que la tangente a la gráfica de G en dicho punto es el eje de abscisas por ser $G'(x_0)=0$, podemos dibujar su gráfica[4] (violeta):

---

[1] Puedes intentarlo por tu cuenta. Basta que hagas los casos 3) y 4) del Ejercicio 2 contenido en *Ejercicio 6.2*.
[2] Como f" está definida en un entorno de x_0, G" también, ya que G"=f".
[3] Observa que G' es convexa en x_0, ya que $G'''(x_0)>0$.
[4] Observa que G es cóncava a la izquierda y convexa a la derecha de x_0, ya que G" es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de dicho punto.



CONCLUSIÓN: la función G tiene un punto de inflexión en x_0. Por tanto, f también.

* * *

Prosigamos el análisis de la función $f(x)=3x^5-5x^4+10$. Nos faltaban por estudiar los puntos x=0 y x=1, ya que en ellos la derivada segunda se anulaba. Veamos cuál es el valor de la derivada tercera en dichos puntos:

Derivadas	x=0	x=1
$f'''(x)=180x^2-120x$	0	60

Por tanto, la función tiene un punto de inflexión en x=1. Sin embargo, nada podemos concluir todavía de lo que sucede en x=0. Para poderlo hacer, necesitamos dar un paso más,[1] que consiste en generalizar los dos criterios que acabamos de ver.

3.- Criterio de la derivada enésima

Siempre que $f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n-1)}$ esté definida en un entorno de x_0 y $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, se puede afirmar lo siguiente:[2]

a) Si n es par, entonces f es convexa en x_0 cuando $f^{(n)}(x_0)>0$ y cóncava cuando $f^{(n)}(x_0)<0$.

b) Si n es impar, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0.

* * *

En efecto, si analizas los resultados que has obtenido en los ejercicios que se indican en la nota 1, observarás lo siguiente:[3]

$$f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow G^{(n-1)} \text{ crece en } x_0 \Rightarrow G^{(n-2)} \text{ convexa en } x_0 \overset{4}{\Rightarrow} \ldots$$

Por tanto, la función $G=G^{(0)}=G^{(n-n)}$ tiene un punto de inflexión en x_0 si n es impar y es convexa en x_0 si n es par.

---

[1] Pero antes de dar ese paso, conviene que hagas los casos 5), 6), 7) y 8) del EJERCICIO 2 contenido en *Ejercicio 6.2*.

[2] Si recuerdas los enunciados de los dos criterios anteriores, recordar éste no requiere mayor esfuerzo, ya que si n es *par* sucede lo mismo que en el criterio de la derivada *segunda*; y si es *impar*, lo mismo que en el criterio de la derivada *tercera*.

[3] El enunciado del criterio de la derivada enésima recoge estos resultados, pero agrupados de otro modo.

[4] Repitiéndose alternativamente ambos resultados, pero, a partir del siguiente, el crecimiento es con punto de inflexión.

Del mismo modo se razona cuando $f^{(n)}(x_0)<0$.

* * *

Ya podemos terminar el análisis de la función $f(x)=3x^5-5x^4+10$. Nos faltaba estudiar el punto x=0, ya que en dicho punto se anulaban las derivadas segunda y tercera. Calculemos las siguientes hasta que demos con la primera que no se anula en dicho punto:

Derivadas	x=0
$f^{(4)}(x)=360x-120$	-120

Como $f^{(4)}(0)<0$, f es cóncava en x=0.

Resumiendo:[1]

Intervalos	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
f es	cóncava	convexa

x	y	Clasificación
1	8	P.I.

* * *

Veamos otro ejemplo. Estudiemos la curvatura y los puntos de inflexión de la función $f(x)=(6-3x)^{1/3}$.

Tenemos que averiguar el signo de la derivada segunda:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot(6-3x)^{-2/3}\cdot(-3)=-(6-3x)^{-2/3}=\frac{-1}{\sqrt[3]{(6-3x)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{2}{3}\cdot(6-3x)^{-5/3}\cdot(-3)=-2\cdot(6-3x)^{-5/3}=\frac{-2}{\sqrt[3]{(6-3x)^5}}$$

Intervalos	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
f" es	-	+
f es	cóncava	convexa

Sólo nos queda por estudiar el punto x=2. Ahora bien, la función no es derivable en x=2. Sin embargo, al ser continua en dicho punto, todavía puede darse el caso de que se trate de un punto de inflexión. Para averiguarlo, calculamos f'(2):

$$f'(2)=\lim_{x\to 2} f'(x)=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{\sqrt[3]{(6-3x)^2}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Por tanto, se trata de un punto de inflexión.

Resumiendo:

Intervalos	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
f es	cóncava	convexa

x	y	Clasificación
2	0	P.I.

[1] Observa que, al ser la función cóncava en x=0, hemos reducido el número de intervalos que aparecen al estudiar la curvatura de la función.

4.- Problemas

1) Mediante el criterio de la derivada enésima, estudia el comportamiento en x=0 de las siguientes funciones:

a) $y=3x^2+4x-1$ **b)** $y=3x^2+6x-1$ **c)** $y=x^7$

d) $y=x^{11}$ **e)** $y=e^x$ **f)** $y=x^{5/3}$

2) Halla los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y=2x^3-9x^2+24x$ **b)** $y=x^3+3x^2-2x+5$ **c)** $y=x^4-6x^3+12x^2+10x+8$

d) $y=x^4-6x^2+9$ **e)** $y=1/x$ **f)** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

g) $y=\text{sen}(2x)$ [1] **h)** $y=\cos x$ [1] **i)** $y=\text{tg}\, x$ [1]

j) $y=\text{arc tg}\, x$ **k)** $y=6^x$ **l)** $y=\ln(2x)$

m) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ **n)** $y=x-\text{arc tg}\, x$ **ñ)** $y=\text{arc tg}\dfrac{1}{x-1}$

o) $y=\sqrt[3]{x-2}$ **p)** $y=\sqrt[3]{(1-x)^5}$ **q)** $y=\sqrt[3]{x^2-1}$

---

[1] Estudiarla sólo en el intervalo $(0,2\pi)$.