

1) (1p) Demuestra que, si se multiplica la segunda columna de una matriz cuadrada de orden tres por un número $\lambda \neq 0$, el determinante de la matriz resultante es igual al producto de λ por el determinante de la matriz de partida.

2) (1p) Define base. Prueba que $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

3) (1p) Prueba que, si $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$, $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{sen}(\vec{a}, \vec{b})$.

4) (1p) Define producto mixto. Halla su expresión analítica.

5) (1p) Calcula razonadamente el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

6) (1p) Resuelve por Cramer el siguiente sistema y comprueba el resultado:

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ x+y-z=2 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$$

7) (1p) Dada la matriz A, halla su inversa mediante determinantes y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8) (1p) Si A es una matriz cuadrada de orden tres y su determinante vale 8, halla el determinante de la matriz $2 \cdot A$.

9) (2p) Si $\vec{a}(1, -1, 2)$ y $\vec{b}(2, 1, 3)$, calcula:

a) $(\vec{a}, \vec{b})$

b) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

c) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$

d) $\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$

Ejercicio 5: Calcula razonadamente el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 10 & 0 & 10 \\ 10 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -15 & 10 \\ 0 & -15 & -15 & 6 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{3}{=} \\ = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -15 & 10 \\ -15 & -15 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{4}{=} \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 5 \\ -15 & -5 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{5}{=} \\ = 3 \cdot (-5 - 75 - 75 + 125 - 3 - 75) = 3 \cdot (-108) = -324$$

¹ $2^{af} \cdot 2$; $3^{af} \cdot 2$.

² $2^{af} - 3 \cdot 1^{af}$; $3^{af} - 5 \cdot 1^{af}$.

³ Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna.

⁴ Extraemos fuera del determinante los factores 3 y 2 de las columnas segunda y tercera, respectivamente.

⁵ Desarrollamos el determinante por Sarrus.

Ejercicio 6: Resuelve por Cramer el siguiente sistema y comprueba el resultado:

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ x+y-z=2 \\ 2x+3z=0 \end{cases} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

* * *

Solución:

a)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3-4} = -3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{6-2-8-3}{-1} = 7; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-1} = 2$$

b) Comprobación:

$$\begin{cases} -3+4=1 \\ -3+7-2=2 \\ -6+6=0 \end{cases}$$

Ejercicio 7: Dada la matriz A, halla su inversa mediante determinantes y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Como $|A| \neq 0$, la matriz A es inversible:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

Calculamos los adjuntos de los elementos de la matriz A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} A^* = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} (A^*)' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)'}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+0+4 & 0+0+0 & 2+0-2 \\ -3+5-2 & 0+1+0 & 2-3+1 \\ -6+0+6 & 0+0+0 & 4+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹ Escribimos la adjunta de A.

² Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.

Ejercicio 8: Si A es una matriz cuadrada de orden tres y su determinante vale 8, halla el determinante de la matriz $2 \cdot A$. (1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |2A| = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} 2^3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8 \cdot |A| = 8 \cdot 8 = 64$$

¹ Extraemos fuera del determinante el factor 2 de las tres filas.

Ejercicio 9: Si $\vec{a}(1, -1, 2)$ y $\vec{b}(2, 1, 3)$, calcula: **a)** $(\vec{a}, \vec{b})$; **b)** $\vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$; **c)** $\vec{a} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$; **d)** $\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$.

(2 Puntos)

* * *

Solución:**a)**

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(1, -1, 2) \cdot (2, 1, 3)}{\sqrt{1+1+4} \cdot \sqrt{4+1+9}} = \frac{2-1+6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{7}{2\sqrt{21}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 40^\circ 12' 10''$$

b)

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \stackrel{1}{=} \vec{a} \cdot 7 = 7\vec{a} = 7 \cdot (1, -1, 2) = (7, -7, 14)$$

c)

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} 0$$

d)

$$\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{a} \wedge (-5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 13\vec{j} - 4\vec{k}$$

¹ El cálculo del paréntesis lo hemos hecho en el apartado anterior.

² Ya que tiene dos filas iguales.