**1)** (2p) Demuestra (sin desarrollar el determinante) que, si a la tercera columna de una matriz cuadrada de orden tres se le suma la segunda columna multiplicada por un número k, el determinante de la matriz resultante coincide con el de la matriz de partida.

Enuncia las propiedades de los determinantes en las que te basas para esta demostración.

**2)** (2p) Define:

**a)** Vectores colineales.

**b)** Vectores coplanarios.

**c)** Base.

**d)** Coordenadas de un vector en una base.

**3)** (1,5p) Si $|A|=-1$, halla, utilizando las propiedades de los determinantes y sin desarrollarlo, el valor de $|B|$:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{pmatrix}$$

**4)** (1,5p) Comprueba que la siguiente matriz tiene inversa cualquiera que sea el valor del parámetro a. Calcula su inversa por determinantes y comprueba el resultado:

$$\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

**5)** (1,5p) Si $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=8$ y $|\vec{a}\wedge\vec{b}|=24\cdot\sqrt{3}$, halla $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

**6)** (1,5p) Si $\vec{a}(1,-1,3)$, $\vec{b}(-2,2,1)$ y $\vec{c}(3,-2,5)$, calcula:

**a)** $\vec{a}\cdot\vec{b}\wedge\vec{c}$.

**b)** $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$.

***Ejercicio 3:*** *Si $|A|=-1$, halla, utilizando las propiedades de los determinantes y sin desarrollarlo, el valor de $|B|$:*

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{pmatrix}$$

*(1,5 PUNTOS)*

* * *

***Solución:***

$$B=\begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix} \overset{1}{=} -3\cdot\begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \overset{2}{=}$$

$$= -3\cdot\left(\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2d & 2f & 2e \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}\right) \overset{3}{=} -3\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \overset{4}{=}$$

$$=3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=3\cdot|A|=3\cdot(-1)=-3$$

---

1 Extraemos fuera del determinante los factores 3 y -1 de las filas segunda y tercera, respectivamente.

2 Por las propiedades de los determinantes.

3 El segundo determinante vale cero, ya que tiene dos filas proporcionales.

4 $2^a c \leftrightarrow 3^a c$.

***Ejercicio 4:*** *Comprueba que la siguiente matriz tiene inversa cualquiera que sea el valor del parámetro a. Calcula su inversa por determinantes y comprueba el resultado:*

$$A=\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$ *(1,5 PUNTOS)*

* * *

***Solución:***

Como $|A|\neq 0$, la matriz A es inversible:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-(a^2-2)=2$$

Calculamos los adjuntos de los elementos de la matriz A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot|a|=a;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot|1|=-1$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot|a^2-2|=2-a^2;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot|a|=a$$

Por tanto:

$$A=\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{1} A^*=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 2-a^2 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{2} (A^*)'=\begin{pmatrix} a & 2-a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} a & 2-a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+1 & a-\frac{a^3}{2}+\frac{a^3}{2}-a \\ \frac{a}{2}-\frac{a}{2} & 1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 Escribimos la adjunta de A.
2 Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.

**Ejercicio 5:** *Si $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=8$ y $|\vec{a}\wedge\vec{b}|=24\cdot\sqrt{3}$, halla $\vec{a}\cdot\vec{b}$.* (1,5 PUNTOS)

* * *

**Solución:**

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \text{sen}(\vec{a},\vec{b}) \Rightarrow 24\cdot\sqrt{3}=6\cdot 8\cdot \text{sen}(\vec{a},\vec{b}) \Rightarrow \text{sen}(\vec{a},\vec{b})=\sqrt{3}/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2(\vec{a},\vec{b})=3/4 \Rightarrow \cos^2(\vec{a},\vec{b})=1/4 \Rightarrow \cos(\vec{a},\vec{b})=\pm 1/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=6\cdot 8\cdot(\pm 1/2)=\pm 24$$

**Ejercicio 6:** *Si $\vec{a}(1,-1,3)$, $\vec{b}(-2,2,1)$ y $\vec{c}(3,-2,5)$, calcula:* **a)** $\vec{a}\cdot\vec{b}\wedge\vec{c}$; **b)** $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$.

(1,5 PUNTOS)

* * *

**Solución:**

**a)**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\wedge\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}=10+12-3-18+2-10=-7$$

**b)**

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{a}\wedge\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}=\vec{a}\wedge(12\vec{i}+13\vec{j}-2\vec{k})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 12 & 13 & -2 \end{vmatrix}=-37\vec{i}+38\vec{j}+25\vec{k}$$