1) (2p) Demuestra:

a)

$$\begin{vmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \lambda\cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

b) $|\vec{a}\wedge\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot \mathrm{sen}(\vec{a},\vec{b})$, si $\vec{a}\neq\vec{0}\neq\vec{b}$.

2) (1p) Define:

a) Sistemas de Cramer.

b) Base.

3) (1,7p) Resuelve por Cramer el siguiente sistema y comprueba el resultado:

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$$

4) (1,8p) Halla la inversa de la matriz A mediante determinantes y comprueba el resultado:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5) (1,7p) Si $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$ y $(\vec{a},\vec{b})=\pi/6$, halla $(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})$.

6) (1,8p) Si $\vec{a}(4,-2,-4)$ y $\vec{b}(6,-3,2)$, calcula:

a) Todos los vectores perpendiculares a $\vec{a}$.

b) Todos los vectores perpendiculares a $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

c) El volumen del tetraedro que determinan los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{i}$.

Ejercicio 3: *Resuelve por Cramer el siguiente sistema y comprueba el resultado:*

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$$

(1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

a)

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{30-75+16}{-30+1}=\frac{-29}{-29}=1; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-32-60+5}{-29}=\frac{-87}{-29}=3;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{25-160-10}{-29}=\frac{-145}{-29}=5$$

b) Comprobación:

$$\begin{cases} 2+3=5 \\ 1+15=16 \\ 15-5=10 \end{cases}$$

Ejercicio 4: *Halla la inversa de la matriz A mediante determinantes y comprueba el resultado:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como $|A|\neq 0$, la matriz A es inversible:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=2-3-1+4=2$$

Calculamos los adjuntos de los elementos de la matriz A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-1;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-1;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=6;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1$$

Por tanto:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow{1} A^*=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{2} (A^*)'=\begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix} -1/2 & 3 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2 & 3 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1/2+1/2+1 & 3+1-4 & -1/2-1/2+1 \\ -1/2+0+1/2 & 3+0-2 & -1/2+0+1/2 \\ -3/2-1/2+2 & 9-1-8 & -3/2+1/2+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Escribimos la adjunta de A.
[2] Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.

Ejercicio 5: *Si $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$ y $(\vec{a},\vec{b})=\pi/6$, halla $(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})$.* (1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

Evidentemente:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=\sqrt{3}\cdot 1\cdot\cos(\pi/6)=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/2=3/2$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=3-1=2$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2\cdot 3/2+|\vec{b}|^2}=\sqrt{3+3+1}=\sqrt{7}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\cdot 3/2+|\vec{b}|^2}=\sqrt{3-3+1}=1$$

Por tanto:

$$\cos(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{2}{\sqrt{7}\cdot 1}=\frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b})=40^{o}53'36''$$

Ejercicio 6: *Si $\vec{a}(4,-2,-4)$ y $\vec{b}(6,-3,2)$, calcula:* ***a)*** *todos los vectores perpendiculares a $\vec{a}$;* ***b)*** *todos los vectores perpendiculares a $\vec{a}$ y $\vec{b}$;* ***c)*** *el volumen del tetraedro que determinan los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{i}$.*

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Sea $\vec{x}(x,y,z)$ un vector perpendicular a $\vec{a}$. Entonces:[1]

$$\vec{x}\perp\vec{a} \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{a}=0 \Rightarrow (x,y,z)\cdot(4,-2,-4)=0 \Rightarrow 4x-2y-4z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-y-2z=0 \Rightarrow y=2x-2z \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=2\alpha-2\beta \\ z=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{2}{=} \alpha\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Si $\vec{x}$ es un vector perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces es colineal con $\vec{a}\wedge\vec{b}$. Por tanto:[3]

$$\vec{x}=\alpha\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})=\alpha\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -4 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}=\alpha\cdot(-16\vec{i}-32\vec{j})=$$

$$=-16\alpha\cdot(\vec{i}+2\vec{j})=-16\alpha\cdot(1,2,0) \overset{4}{=} \beta(1,2,0)$$

c)

$$V=\frac{1}{6}\cdot|[\vec{a},\vec{b},\vec{i}]|=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 6 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right| \overset{5}{=} \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\cdot|-4-12|=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$$

---

[1] También puede hacerse de la siguiente manera. Dos vectores concretos perpendiculares al vector $\vec{a}$ son, por ejemplo, (0,4,-2) y (4,0,4). Pues bien, los vectores perpendiculares al vector $\vec{a}$ son los vectores $\vec{x}=\alpha(0,4,-2)+\beta(4,0,4)$, con α y β no simultáneamente nulos.

[2] Donde α y β no pueden ser simultáneamente nulos.

[3] También puede hacerse como el apartado anterior, lo que conduce a un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

[4] Donde $\beta\neq 0$.

[5] Desarrollamos el determinante por los elementos de la última fila.