

1) (1p) Prueba la siguiente propiedad de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

2) (1p) Prueba que el módulo del producto vectorial de dos vectores no colineales es igual al área del paralelogramo que determinan.

3) (1p) Define producto mixto y enuncia sus propiedades.

4) (1,7p) Prueba la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

5) (1,8p) Para qué valores de k es inversible la siguiente matriz. Halla su inversa para $k=0$ utilizando su determinante y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k^2 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

6) (1,7p) Si $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, comprueba la siguiente identidad:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

7) (1,8p) Los vectores $\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{x}$ son coplanarios. Halla $\vec{x}$ si se sabe que $|\vec{x}|=2$ y que $|\vec{x} \wedge \vec{i}| = |\vec{x} \cdot \vec{i}|$.

Ejercicio 4: Prueba la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \quad (1, 7 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} \\ = \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix} \stackrel{3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & a+b+c & 0 \\ 2c & 0 & a+b+c \end{vmatrix} \stackrel{4}{=} (a+b+c)^3$$

¹ $1^a f + 2^a f + 3^a f$.

² $2^a c - 1^a c$; $3^a c - 1^a c$.

³ $2^a c \cdot (-1)$; $3^a c \cdot (-1)$.

⁴ El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 5: Para qué valores de k es inversible la siguiente matriz. Halla su inversa para $k=0$ utilizando su determinante y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k^2 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

* * *

(1,8 Puntos)

Solución:

a) La matriz A es inversible si $k \neq 1$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & k^2 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} 0 & k^2 & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} \begin{vmatrix} k^2 & 1 \\ k-1 & 1-k \end{vmatrix} =$$

$$= k^2(1-k) + (1-k) = (1-k)(k^2+1) = 0 \Rightarrow 1-k=0 \Rightarrow k=1$$

b) Calculamos la inversa de A para $k=0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4} (A^*)' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)'}{|A|} \stackrel{5}{=} \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ -1+0+1 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ -1+1+0 & 1-1+0 & 0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹ $2^{af} - 3^{af}$.

² Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna.

³ Calculamos la adjunta de A .

⁴ Calculamos la traspuesta de la adjunta de A .

⁵ Ya que $|A| = (1-0)(0^2+1) = 1$.

Ejercicio 6: Si $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$ y $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, comprueba la siguiente identidad:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

* * *

(1, 7 PUNTOS)

Solución:

1º) Calculamos el primer miembro de la identidad:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{a} \wedge (-2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k}$$

2º) Calculamos el segundo miembro de la identidad:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} &= [(1, -1, 2) \cdot (-1, 1, -1)] \cdot \vec{b} - [(1, -1, 2) \cdot (1, 2, 0)] \cdot \vec{c} = \\ &= (-1 - 1 - 2) \cdot \vec{b} - (1 - 2 + 0) \cdot \vec{c} = -4 \cdot (\vec{i} + 2\vec{j}) + 1 \cdot (-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = -4\vec{i} - 8\vec{j} - \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = -5\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$

Ejercicio 7: Los vectores $\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{x}$ son coplanarios. Halla $\vec{x}$ si se sabe que $|\vec{x}|=2$ y que $|\vec{x}\wedge\vec{i}|=|\vec{x}\cdot\vec{i}|$.

(1, 8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sea $\vec{x}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Como $\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{x}$ son coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z+x-y-z=0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$$

Por otro lado:

$$|\vec{x}\wedge\vec{i}|=|\vec{x}\cdot\vec{i}| \Rightarrow \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| = |(x, y, z) \cdot (1, 0, 0)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z \cdot \vec{j} - y \cdot \vec{k}| = |x| \Rightarrow \sqrt{y^2+z^2} = |x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2+z^2=x^2 \stackrel{1}{\Rightarrow} y^2+z^2=y^2 \Rightarrow z^2=0 \Rightarrow z=0$$

Por último:

$$|\vec{x}|=2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2}=2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=4 \stackrel{2}{\Rightarrow} 2y^2=4 \Rightarrow y^2=2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{2}$$

Por tanto, hay dos soluciones:

x	y	z	$\vec{x}$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$
$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$

¹ Ya que $x=y$.

² Ya que $z=0$ y $x=y$.