

3 de abril de 2009.

- 1) (1p) Demuestra la siguiente propiedad de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \lambda \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- 2) (1p) Define sistema de Cramer.

- 3) (1p) Demuestra la siguiente fórmula: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

- 4) (1,7p) Sin desarrollar el determinante y justificando cada paso, demuestra la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & b+a \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0$$

- 5) (1,8p) Halla la inversa de la siguiente matriz utilizando determinantes y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- 6) (1,8p) Dados los vectores $\vec{a} = (-1, -7, 3)$ y $\vec{b} = (2, 1, -1)$:

a) Halla la proyección de \vec{a} sobre \vec{b} .

b) Calcula el simétrico de \vec{a} respecto de \vec{b} .

- 7) (1,7p) Si $\vec{a} = (3, 0, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, -1)$ y $\vec{c} = (1, -1, 0)$, comprueba la siguiente identidad:

$$[(\vec{a} \wedge \vec{b}), (\vec{b} \wedge \vec{c}), (\vec{c} \wedge \vec{a})] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]^2$$

Ejercicio 4: Sin desarrollar el determinante y justificando cada paso, demuestra la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & b+a \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0 \quad (1,7 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & b+a \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = 0$$

Si $a+b+c+d=0$, el determinante vale cero por tener una columna nula; si $a+b+c+d \neq 0$, el determinante vale cero por tener dos columnas proporcionales (1^a y 4^a).

¹ $4^a c + 2^a c + 3^a c$.

Ejercicio 5: Halla la inversa de la siguiente matriz utilizando determinantes y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como $|A| \neq 0$, la matriz A es inversible:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} -4 + 8 - 3 = 1$$

Calculamos los adjuntos de los elementos de la matriz A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} A^* = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} (A^*)' = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)'}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+0+8 & -1+0+1 & 2+0-2 \\ 0+24-24 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -28+12+16 & -4+2+2 & 8-3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹ Desarrollamos el determinante por la regla de Sarrus.

² Escribimos la adjunta de A.

³ Calculamos la traspuesta de la adjunta de A.

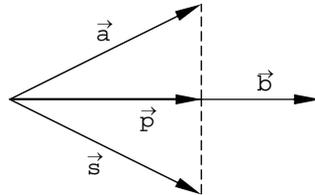
Ejercicio 6: Dados los vectores $\vec{a}=(-1,-7,3)$ y $\vec{b}=(2,1,-1)$: **a)** halla la proyección de \vec{a} sobre \vec{b} ; **b)** calcula el simétrico de \vec{a} respecto de \vec{b} .

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sean \vec{p} y \vec{s} , respectivamente, la proyección de \vec{a} sobre \vec{b} y el simétrico de \vec{a} respecto de \vec{b} :



Entonces:

$$\begin{aligned} \bullet \vec{p} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b} = \frac{(-1, -7, 3) \cdot (2, 1, -1)}{(2, 1, -1) \cdot (2, 1, -1)} \cdot \vec{b} = \frac{-2-7-3}{4+1+1} \cdot \vec{b} = \frac{-12}{6} \cdot \vec{b} \\ &= -2 \cdot \vec{b} = -2 \cdot (2, 1, -1) = (-4, -2, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{a} + \vec{s} &= 2\vec{p} \Rightarrow \vec{s} = 2\vec{p} - \vec{a} = 2(-4, -2, 2) - (-1, -7, 3) = (-8, -4, 4) - (-1, -7, 3) \\ &= (-7, 3, 1) \end{aligned}$$

Ejercicio 7: Si $\vec{a}=(3,0,-1)$, $\vec{b}=(1,0,-1)$ y $\vec{c}=(1,-1,0)$, comprueba la siguiente identidad:

$$[(\vec{a}\wedge\vec{b}),(\vec{b}\wedge\vec{c}),(\vec{c}\wedge\vec{a})]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2 \quad (1,7 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

1º) Calculamos el primer miembro de la identidad:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{j}; \quad \vec{b}\wedge\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}; \quad \vec{c}\wedge\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$$

Por tanto:

$$[(\vec{a}\wedge\vec{b}),(\vec{b}\wedge\vec{c}),(\vec{c}\wedge\vec{a})] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2+6=4$$

2º) Calculamos el segundo miembro de la identidad:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1-3=-2$$

Por tanto:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2=4$$