

1) (1,5p) Define:

- a) Menor complementario.
- b) Base.
- c) Producto mixto.

2) (1,5p) Prueba que, si $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$, $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \text{sen}(\vec{a}, \vec{b})$.

3) (1,7p) Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & x & x \\ x & x+2 & x & x \\ x & x & x+2 & x \\ x & x & x & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

4) (1,8p) Si el determinante de la matriz de coeficientes del siguiente sistema vale 3, resuélvelo por Cramer:

$$\begin{cases} (a^2-2)x+(a-1)y=-1 \\ (a-1)x+ay=a \end{cases}$$

5) (1,7p) Calcula x para que el módulo de la proyección del vector $\vec{a}=(x,-1,5)$ sobre el vector $\vec{b}=(1,2,-2)$ sea 3 y el ángulo (\vec{a}, \vec{b}) sea obtuso.

6) (1,8p) Si $\vec{a}=(-2,-1,0)$, $\vec{b}=(0,-1,1)$, $\vec{c}=(1,1,1)$ y $\vec{d}=(1,0,2)$, comprueba la siguiente identidad:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

Ejercicio 3: Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & x & x \\ x & x+2 & x & x \\ x & x & x+2 & x \\ x & x & x & x+2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1,7 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} x+2 & x & x & x \\ x & x+2 & x & x \\ x & x & x+2 & x \\ x & x & x & x+2 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{1} \begin{vmatrix} 4x+2 & x & x & x \\ 4x+2 & x+2 & x & x \\ 4x+2 & x & x+2 & x \\ 4x+2 & x & x & x+2 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{2}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4x+2 & x & x & x \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{3} (4x+2) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow 4x+2=0 \Rightarrow x=-1/2$$

¹ $1^a c + 2^a c + 3^a c + 4^a c$.

² $2^a f - 1^a f$; $3^a f - 1^a f$; $4^a f - 1^a f$.

³ El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejercicio 4: Si el determinante de la matriz de coeficientes del siguiente sistema vale 3, resuélvelo por Cramer:

$$\begin{cases} (a^2-2)x+(a-1)y=-1 \\ (a-1)x+ay=a \end{cases} \quad (1,8 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2-2 & a-1 \\ a-1 & a \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow a^3-2a-(a-1)^2=3 \Rightarrow a^3-2a-a^2+2a-1-3=0 \Rightarrow a^3-a^2-4=0 \stackrel{1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (a-2) \cdot (a^2+a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ a^2+a+2=0 \Rightarrow a=\frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \text{ no tiene solución} \end{cases}$$

Por tanto, el sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+2y=2 \end{cases}$$

Aplicamos Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2-2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$$

¹ Descomponemos el polinomio por Ruffini.

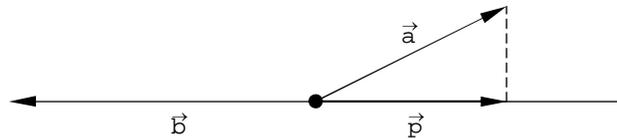
Ejercicio 5: Halla x para que el módulo de la proyección del vector $\vec{a}=(x,-1,5)$ sobre el vector $\vec{b}=(1,2,-2)$ sea 3 y el ángulo (\vec{a},\vec{b}) obtuso.

(1,7 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sea \vec{p} el vector proyección de \vec{a} sobre \vec{b} :



Entonces:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b} = \frac{(x, -1, 5) \cdot (1, 2, -2)}{(1, 2, -2) \cdot (1, 2, -2)} \cdot \vec{b} = \frac{x-2-10}{1+4+4} \cdot \vec{b} = \frac{x-12}{9} \cdot \vec{b} \Rightarrow \\ \Rightarrow |\vec{p}| &= \left| \frac{x-12}{9} \right| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow 3 = \left| \frac{x-12}{9} \right| \cdot \sqrt{1+4+4} \Rightarrow 3 = \left| \frac{x-12}{9} \right| \cdot 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \frac{x-12}{9} \right| &= 1 \Rightarrow \frac{x-12}{9} = \pm 1 \Rightarrow x-12 = \pm 9 \Rightarrow \begin{cases} x-12=9 \Rightarrow x=21 \\ x-12=-9 \Rightarrow x=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Por otro lado, como el ángulo que forman los vectores \vec{a} y \vec{b} es obtuso, su producto escalar es negativo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x, -1, 5) \cdot (1, 2, -2) = x-2-10 = x-12 < 0 \Rightarrow x < 12 \Rightarrow x=3$$

Ejercicio 6: Si $\vec{a} = (-2, -1, 0)$, $\vec{b} = (0, -1, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$ y $\vec{d} = (1, 0, 2)$, comprueba la siguiente identidad:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix} \quad (1,8 \text{ PUNTOS})$$

* * *

Solución:

1º) Calculamos el primer miembro de la identidad:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{c} \wedge \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

Por tanto:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (-1, 2, 2) \cdot (2, -1, -1) = -2 - 2 - 2 = -6$$

2º) Calculamos el segundo miembro de la identidad:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (-2, -1, 0) \cdot (1, 1, 1) = -2 - 1 + 0 = -3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = (-2, -1, 0) \cdot (1, 0, 2) = -2 + 0 + 0 = -2$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (0, -1, 1) \cdot (1, 1, 1) = 0 - 1 + 1 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = (0, -1, 1) \cdot (1, 0, 2) = 0 + 0 + 2 = 2$$

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$