15 de diciembre de 2000.

1) (4p) Demuestra las siguientes afirmaciones:[1]

a) Si $y=\cos u$, $y'=-\operatorname{sen} u\cdot u'$.

b) Si $y=\operatorname{arc\,sen} u$, $y'=u'/\sqrt{1-u^2}$.

c) Si $y=a^u$, $y'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$ (a es un número real positivo).

d) Si $y=u^r$, $y'=r\cdot u^{r-1}\cdot u'$ (r es un número real).

2) (1p) Halla el valor de los parámetros a y b para que la función siguiente sea derivable en x=0:

$$f(x)=\begin{cases} a(1+e^x) & \text{si } x<0 \\ b+\ln(1+x) & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

3) (1p) Deriva y simplifica (o viceversa) la función:

$$y=\operatorname{sen}^2 \operatorname{arc\,cos} x^2$$

4) (1p) Dada la función $y=(1+x)\cdot\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+4$, se pide:

a) Su derivada simplificada.

b) La tangente y la normal en el punto de abscisa x=0.

5) (1p) En un rectángulo de 4 m de perímetro se sustituyen los lados por semicircunferencias exteriores. Halla las dimensiones que debemos dar a los lados para que el área de la figura resultante sea mínima.

6) (2p) Estudia y representa la gráfica de la función:[2]

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

[1] u es una función de x.
[2] No es seguro que ésta fuera la gráfica que se puso este curso.

Ejercicio 2: *Halla el valor de los parámetros a y b para que la función siguiente sea derivable en x=0:*

$$f(x)=\begin{cases} a(1+e^x) & \text{si } x<0 \\ b+\ln(1+x) & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Si $x\neq 0$, la derivada de f es:

$$f'(x)=\begin{cases} a\cdot e^x & \text{si } x<0 \\ 1/(1+x) & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Si f es continua[1] en x=0, entonces b=2a:

- $f(0)=b$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}[a(1+e^x)]=2a$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}[b+\ln(1+x)] \stackrel{2}{=} b$

Si f es derivable en x=0, entonces a=1 (y, por tanto, b=2):

- $f'_-(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(a\cdot e^x)=a$
- $f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}[1/(1+x)]=1$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada:

- $f'_-(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{a(1+e^x)-b}{x}=\dfrac{2a-b}{0^-}\stackrel{3}{\Rightarrow} 2a-b=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'_-(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{a(1+e^x)-b}{x}\stackrel{4}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{a\cdot e^x}{1}=a$$

- $f'_+(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{b+\ln(1+x)-b}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\stackrel{5}{=}1$

Por tanto, para que la función sea derivable, a=1. Y como 2a-b=0, entonces b=2. Llegamos, pues, al mismo resultado que antes.

---

[1] Si f es derivable en x=0, debe ser continua en dicho punto.

[2] Para calcular el límite del segundo sumando aplicamos la regla del límite de la composición.

[3] Si $2a-b\neq 0$, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en x=0.

[4] Como sale la indeterminación 0/0, ya que 2a-b=0, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sustituyendo b por 2a y utilizando el hecho de que, en x=0, $e^x-1\sim x$.

[5] Ya que, en x=0, $\ln(1+x)\sim x$. También puede hacerse por L'Hôpital.

Ejercicio 3: *Deriva y simplifica (o viceversa) la función:*

$$y = \mathrm{sen}^2 \arccos x^2$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Si hacemos el cambio $\arccos x^2 = z$, la función queda:

$$y = \mathrm{sen}^2 z$$

Ahora bien:

$$\arccos x^2 = z \Rightarrow \cos z = x^2 \Rightarrow \cos^2 z = x^4 \Rightarrow y = \mathrm{sen}^2 z = 1 - \cos^2 z = 1 - x^4$$

Por tanto:

$$y' = -4x^3$$

* * *

O también:

$$y' = 2 \cdot \mathrm{sen} \arccos x^2 \cdot (\mathrm{sen} \arccos x^2)' =$$

$$= 2 \cdot \mathrm{sen} \arccos x^2 \cdot \cos \arccos x^2 \cdot (\arccos x^2)' =$$

$$= 2 \cdot \mathrm{sen} \arccos x^2 \cdot \cos \arccos x^2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x \stackrel{1}{=}$$

$$= \frac{-4x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \mathrm{sen}\, z \cdot \cos z \stackrel{2}{=} \frac{-4x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \sqrt{1-x^4} \cdot x^2 = -4x^3$$

Aunque el cálculo realizado para obtener la derivada por este procedimiento carece de sentido para x=-1 y x=1, el resultado final es aplicable también para ellos. En efecto, como la función y es continua en dichos puntos:[3]

- $y'(-1) \stackrel{4}{=} y'_+(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} y'(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (-4x^3) = 4$
- $y'(1) \stackrel{4}{=} y'_-(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} y'(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (-4x^3) = -4$

Por tanto, $y'(x) = -4x^3$ y $\mathrm{Dom}(y') = \mathrm{Dom}(y) = [-1,1]$.

---

[1] Si $\arccos x^2 = z$.

[2] $\arccos x^2 = z \Rightarrow \cos z = x^2 \Rightarrow \cos^2 z = x^4 \Rightarrow \mathrm{sen}^2 z = 1 - \cos^2 z = 1 - x^4$.

[3] Es fácil probarlo.

[4] Ya que $\mathrm{Dom}(y) = [-1,1]$.

Ejercicio 4: *Dada la función $y=(1+x)\cdot \text{arc tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+4$, se pide:* ***a)*** *su derivada simplificada;* ***b)*** *la tangente y la normal en el punto de abscisa x=0.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

1º) Derivamos la función:

$$y'=\text{arc tg}\sqrt{x}+(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\text{arc tg}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\text{arc tg}\sqrt{x}$$

Aunque el cálculo realizado para obtener la derivada carece de sentido para x=0, el resultado final es aplicable también para él. En efecto, como la función y es continua en dicho punto:[1]

$$y'(0)\overset{2}{=}y'_+(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}y'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\text{arc tg}\sqrt{x}\overset{3}{=}0$$

Por tanto, $y'(x)=\text{arc tg}\sqrt{x}$ y $\text{Dom}(y')=\text{Dom}(y)=[0,+\infty)$.

2º) Calculamos la ordenada en el punto de tangencia:

$$y(0)=1\cdot\text{arc tg}\,0-0+4=4$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(0)=\text{arc tg}\,0=0$$

Resumiendo:

x	y	y'
0	4	0

4º) Por tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y-4=0\cdot(x-0)\ \Rightarrow\ y=4$$

Y la de la normal:[4]

$$x=0$$

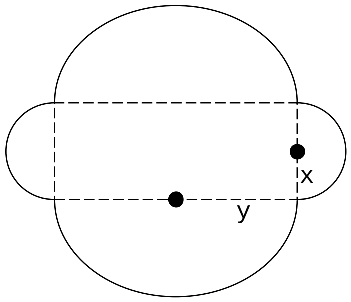
[1] Es fácil probarlo.
[2] Ya que Dom(f)=[0,+∞).
[3] Para calcular este límite hemos aplicado la regla del límite de la composición.
[4] Ya que la perpendicular a la recta horizontal y=4 que pasa por el punto P(0,4) es la recta vertical x=0.

Ejercicio 5: *En un rectángulo de 4 m de perímetro se sustituyen los lados por semicircunferencias exteriores. Halla las dimensiones que debemos dar a los lados para que el área de la figura resultante sea mínima.* *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Sean x e y la mitad de las longitudes de los lados del rectángulo:



El área del recinto es mínima:

$$A=\pi x^2+\pi y^2+4xy$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$4x+4y=4 \Rightarrow x+y=1 \Rightarrow y=1-x \Rightarrow A=\pi x^2+\pi(1-x)^2+4x(1-x)=$$

$$=\pi x^2+\pi(1-2x+x^2)+4x-4x^2=\pi x^2+\pi-2\pi x+\pi x^2+4x-4x^2=(2\pi-4)x^2+(4-2\pi)x+\pi=$$

$$=2(\pi-2)x^2-2(\pi-2)x+\pi$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A'=4(\pi-2)x-2(\pi-2)=2(\pi-2)(2x-1)=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=1/2$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[1] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $x=1/2$:

$$A''=4(\pi-2) \Rightarrow A''(1/2)=4(\pi-2)>0 \Rightarrow A \text{ es mínima para } x=1/2$$

Si $x=1/2$, entonces $y=1/2$.

Por tanto, se trata del cuadrado de lado 1 m.

[1] También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

Ejercicio 6: *Estudia y representa la gráfica de la función:*

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dominio: $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

2º) Paridad: como el dominio no es simétrico respecto del origen de coordenadas, la función no es ni par ni impar.

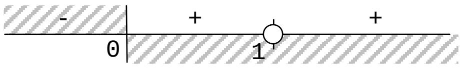
3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: $y=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$.

b) Con OY: $x=0 \Rightarrow y=0$.

5º) Signo de la función:[1]



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) La recta $x=1$ es asíntota vertical:

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

b) La recta $y=x+2$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2-2x+1}\overset{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty} x=\pm\infty$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-2x+1}\overset{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty} 1=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-2x+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}\overset{2}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty} 2=2$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{x^3}{x^2-2x+1}-(x+2)=\frac{x^3-x^3+2x^2-x-2x^2+4x-2}{x^2-2x+1}=\frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$ y positiva en $+\infty$, la función está por debajo de la asíntota en $-\infty$ y por encima en $+\infty$.

[1] Hemos señalado el punto $x=1$ para recordarnos que no pertenece al dominio de la función.

[2] Ya que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n \sim a_n\cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x, simplificando a continuación. O por L'Hôpital.

7º) Continuidad. Discontinuidades:

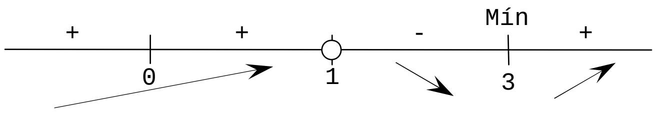
a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

b) La función presenta en x=1 una discontinuidad de salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

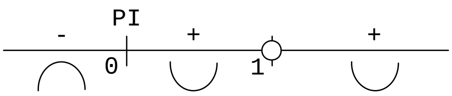
8º) Signo de la derivada primera:[1]



9º) Signo de la derivada segunda:[2]

$$f'(x)=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3} \Rightarrow f''(x)=\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-(x^3-3x^2)3(x-1)^2}{(x-1)^6}=$$

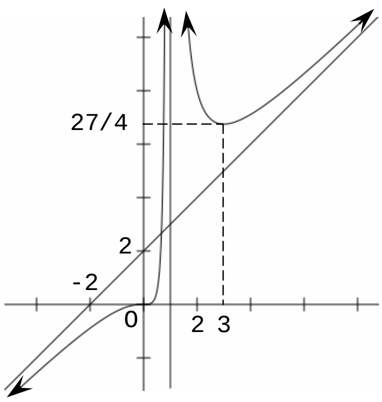
$$=\frac{(3x^2-6x)(x-1)-3(x^3-3x^2)}{(x-1)^4}=\frac{3x^3-3x^2-6x^2+6x-3x^3+9x^2}{(x-1)^4}=\frac{6x}{(x-1)^4}$$



10º) Tabla de valores:

x	y	Clasificación
0	0	Corte con los ejes y punto de inflexión
3	27/4	Mínimo

Gráfica:



[1] Aplicamos aquí el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.
[2] Aplicamos aquí el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.