1) (2p) Define los siguientes conceptos:

a) Derivada de una función en un punto.

b) Punto de inflexión.

2) (2p) Demuestra las siguientes afirmaciones:[1]

a) Si $y=\operatorname{arc\,tg} u$, $y'=u'/(1+u^2)$.

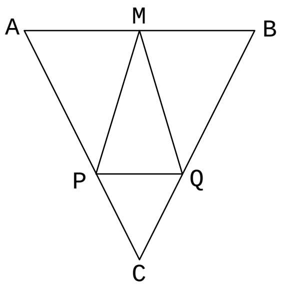
b) Si $y=a^u$, $y'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$.

3) (1,3p) Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, calcula:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x}$$

4) (1,3p) Halla a y b para que la curva $y=ax^3+bx^2+ax+b$ sea tangente a la recta $4x+y=8$ en el punto de ordenada 0.

5) (1,4p) De los triángulos isósceles MPQ que se pueden inscribir en el triángulo isósceles ABC, halla la base y la altura del que tiene mayor área. DATOS: AM=MB=12 cm; AC=BC=20 cm.



6) (2p) Estudia y representa la gráfica de la función:[2]

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$$

[1] u es una función de x.
[2] No es seguro que ésta fuera la gráfica que se puso este curso.

Ejercicio 3: *Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, calcula:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x}$$

(1,3 PUNTOS)

* * *

Solución:

Consideramos la función:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Evidentemente:

$$f(0)=\ln\sqrt{\frac{1+0}{1-0}}=\ln 1=0$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

Ahora bien:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}\overset{1}{=}\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\cdot[\ln(1+x)-\ln(1-x)]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{1-x^2}\Rightarrow f'(0)=1$$

Por consiguiente:

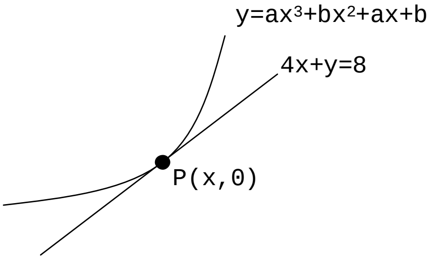
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x}=1$$

[1] Este modo de proceder se ha justificado en *Derivadas*, en este mismo *blog*. También puede hallarse la derivada directamente.

Ejercicio 4: *Halla a y b para que la curva $y=ax^3+bx^2+ax+b$ sea tangente a la recta $4x+y=8$ en el punto de ordenada 0.* *(1,3 PUNTOS)*

* * *

Solución:



Sea P(x,0) el punto de tangencia. Como dicho punto pertenece a la recta $4x+y=8$, satisface su ecuación:

$$4x+0=8 \Rightarrow x=2$$

Teniendo en cuenta además que la pendiente de la recta tangente es -4, podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'
2	0	-4

Como $y=ax^3+bx^2+ax+b$, entonces $y'=3ax^2+2bx+a$.

Ahora bien, como los puntos (2,0) y (2,-4) pertenecen a las gráficas de y e y', respectivamente, tenemos lo siguiente:

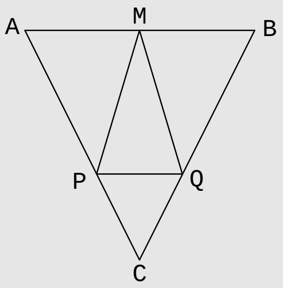
$$y(2)=0 \Rightarrow 8a+4b+2a+b=0 \Rightarrow 10a+5b=0 \Rightarrow 5b=-10a \Rightarrow b=-2a$$

$$y'(2)=-4 \Rightarrow 12a+4b+a=-4 \Rightarrow 13a+4b=-4 \stackrel{1}{\Rightarrow} 13a-8a=-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5a=-4 \Rightarrow a=-4/5 \Rightarrow b=8/5$$

[1] Ya que b=-2a.

Ejercicio 5: *De los triángulos isósceles MPQ que se pueden inscribir en el triángulo isósceles ABC, halla la base y la altura del que tiene mayor área. DATOS: AM=MB=12 cm; AC=BC=20 cm.*

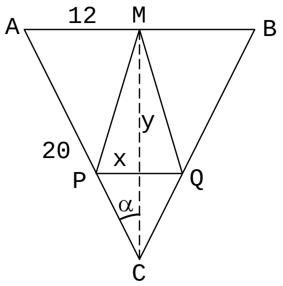


(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sean x e y, respectivamente, la mitad de la base y la altura del triángulo MPQ. Sea α el ángulo ACM:



El área del triángulo MPQ es máxima:

$$A=\frac{2xy}{2}=xy$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$MC^2=AC^2-AM^2=400-144=256 \Rightarrow MC=16 \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{MA}{MC}=\frac{x}{MC-y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12}{16}=\frac{x}{16-y} \Rightarrow x=\frac{12(16-y)}{16}=\frac{3(16-y)}{4}=\frac{48-3y}{4} \Rightarrow A=\frac{48y-3y^2}{4}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A'=\frac{48-6y}{4}=\frac{24-3y}{2}=0 \Rightarrow 24-3y=0 \Rightarrow y=8$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[1] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en y = 8:

$$A''=-3/2 \Rightarrow A''(8)=-3/2<0 \Rightarrow A \text{ es máxima para } y=8$$

Si y=8, entonces x=24/4=6.

Por tanto, se trata del triángulo de base 12 cm y de altura 8 cm.

[1] También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

Ejercicio 6: *Estudia y representa la gráfica de la función:*

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dominio: $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2º) Paridad: como el dominio es simétrico respecto del origen de coordenadas, calculamos f(-x):

$$f(-x)=\frac{-x^3-3x^2+4}{x^2}$$

La función no es ni par ni impar.

3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: $y=0 \Rightarrow x^3-3x^2+4=0 \overset{1}{\Rightarrow} (x+1)(x-2)^2=0 \Rightarrow x=-1,\ x=2$.

b) Con OY: como $x\neq 0$, no hay puntos de corte.

5º) Signo de la función:[2]

6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) La recta x=0 es asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

b) La recta y=x-3 es asíntota oblicua en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}\overset{3}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3}\overset{3}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}1=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2+4-x^3}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^2+4}{x^2}\overset{3}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x^2}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}(-3)=-3$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2}-(x-3)=\frac{x^3-3x^2+4-x^3+3x^2}{x^2}=\frac{4}{x^2}$$

---

1 Factorizamos el polinomio por Ruffini.

2 Hemos señalado el punto x=0 para recordarnos que no pertenece al dominio de la función.

3 Ya que $a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n\sim a_n\cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x, simplificando a continuación. O por L'Hôpital.

Por tanto, como la diferencia es siempre positiva, la función está por encima de la asíntota en $-\infty$ y en $+\infty$.

7º) Continuidad. Discontinuidades:

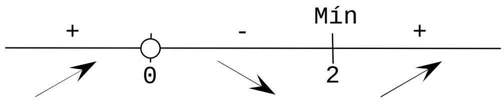
a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+4}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{(3x^2-6x)x^2-(x^3-3x^2+4)2x}{x^4}=$$

$$=\frac{3x^4-6x^3-2x^4+6x^3-8x}{x^4}=\frac{x^4-8x}{x^4}=\frac{x^3-8}{x^3}\overset{1}{=}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$$

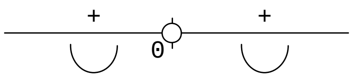
b) La función presenta en x=0 una discontinuidad de salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

8º) Signo de la derivada primera:[2]



9º) Signo de la derivada segunda:[3]

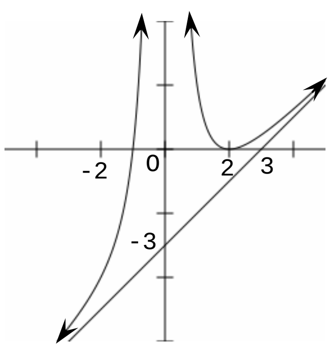
$$f'(x)=\frac{x^3-8}{x^3} \Rightarrow f''(x)=\frac{3x^2\cdot x^3-(x^3-8)3x^2}{x^6}=\frac{3x^5-3x^5+24x^2}{x^6}=\frac{24x^2}{x^6}=\frac{24}{x^4}$$



10º) Tabla de valores:

x	y	Clasificación
-1	0	Corte con OX
2	0	Corte con OX y mínimo

Gráfica:



[1] Factorizamos el numerador por Ruffini.
[2] Aplicamos aquí el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.
[3] Aplicamos aquí el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.