

1) (4p) Teoría:

a) Define derivada de una función en un punto.

b) Halla la derivada de $y=a^u$, donde a es una constante positiva distinta de 1 y u es una función de x .

c) Enuncia la condición necesaria de extremo relativo.

d) Define punto de inflexión.

2) (1p) Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, halla la derivada de $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sen x$ en $x=0$.

3) (1p) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=\cos(x+y)$ en el punto $(\pi/2,0)$.

4) (1p) Un empresario tiene que fabricar recipientes abiertos por arriba, de base cuadrada y con una capacidad de 4000 litros. Calcula las dimensiones que debe tener el recipiente para que el coste del material empleado sea el mínimo posible.

5) (1p) Calcula a , b y c si se sabe que la derivada de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ en el punto $(1,1)$ es cero, pero que en ese punto la función f no tiene un extremo.

6) (2p) Estudia y representa la gráfica de la función:¹

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4}$$

¹ No es seguro que ésta fuera la gráfica que se puso este curso.

Ejercicio 2: Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, halla la derivada de $f(x)=\sqrt{x}\cdot\text{sen } x$ en $x=0$. (1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot \text{sen } x - 0}{x} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

¹ Ya que, en $x=0$, $\text{sen } x \sim x$.

Ejercicio 3: Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=\cos(x+y)$ en el punto $(\pi/2, 0)$.
* * *

(1 PUNTO)

Solución:

1º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:¹

$$y' = -\operatorname{sen}(x+y) \cdot (x+y)' = -\operatorname{sen}(x+y) \cdot (1+y')$$

2º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y' \stackrel{2}{=} -\operatorname{sen}(\pi/2) \cdot (1+y') = -1 - y' \Rightarrow 2y' = -1 \Rightarrow y' = -1/2$$

Resumiendo:

x	y	y'
$\pi/2$	0	-1/2

3º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y - 0 = -\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\pi}{4}$$

¹ Por el método de derivación implícita.

² Ya que $x=\pi/2$ e $y=0$.

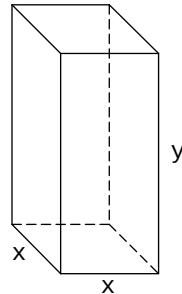
Ejercicio 4: Un empresario tiene que fabricar recipientes abiertos por arriba, de base cuadrada y con una capacidad de 4000 litros. Calcula las dimensiones que debe tener el recipiente para que el coste del material empleado sea el mínimo posible.

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Sean x e y , respectivamente, la longitud del lado de la base y la altura del recipiente:



El área total del recipiente es mínima:

$$A = x^2 + 4xy$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$V = 4000 \Rightarrow 4000 = x^2 \cdot y \Rightarrow y = \frac{4000}{x^2} \Rightarrow A = x^2 + 4x \cdot \frac{4000}{x^2} = x^2 + \frac{16000}{x} = \frac{x^3 + 16000}{x}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A' = \frac{3x^3 - x^3 - 16000}{x^2} = \frac{2x^3 - 16000}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 = 16000 \Rightarrow x^3 = 8000 \Rightarrow x = 20$$

Como¹ $D = x^2 > 0$, para aplicar el criterio de la derivada segunda podemos sustituir² A'' por N' , donde $N = 2x^3 - 16000$:

$$N' = 6x^2 \Rightarrow N'(20) = 6 \cdot 400 > 0 \Rightarrow A \text{ es mínima para } x = 20$$

Por último,³ si $x = 20$ dm, entonces $y = 4000/400 = 10$ dm.

¹ Designamos por D al denominador de la derivada y por N al numerador.

² Ya que los signos de N' y A'' coinciden en $x = 20$.

³ 1 litro es 1 dm³.

Ejercicio 5: Calcula a , b y c si se sabe que la derivada de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ en el punto $(1,1)$ es cero, pero que en ese punto la función f no tiene un extremo.

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Si $f''(1) \neq 0$, entonces, como $f'(1)=0$ y $\text{Dom}(f')=\mathbb{R}$, por el criterio de la derivada segunda la función f tendría un extremo en $x=1$. Pero no lo tiene. Por tanto $f''(1)=0$. Podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'	y''
1	1	0	0

Como $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, entonces $f'(x)=3x^2+2ax+b$ y $f''(x)=6x+2a$.

Como el punto $(1,0)$ pertenece a las gráficas de las funciones f'' y f' , y el punto $(1,1)$ pertenece a la gráfica de la función f , tenemos lo siguiente:

$$f''(1)=0 \Rightarrow 6+2a=0 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow a=-3$$

$$f'(1)=0 \Rightarrow 3+2a+b=0 \stackrel{1}{\Rightarrow} 3-6+b=0 \Rightarrow b=3$$

$$f(1)=1 \Rightarrow 1+a+b+c=1 \stackrel{2}{\Rightarrow} -3+3+c=0 \Rightarrow c=0$$

¹ Ya que $a=-3$.

² Ya que $a=-3$ y $b=3$.

Ejercicio 6: Estudia y representa la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dominio: $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

2º) Paridad: como el dominio es simétrico respecto del origen de coordenadas, calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{-x}{x^2 - 4} = -\frac{x}{x^2 - 4} = -f(x)$$

La función es impar.

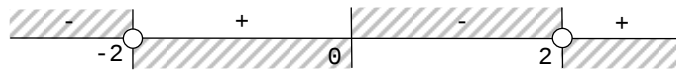
3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: $y=0 \Rightarrow x=0$.

b) Con OY: $x=0 \Rightarrow y=0$.

5º) Signo de la función:¹



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) Las rectas $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{-4 \cdot 0^-} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{-4 \cdot 0^+} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{0^- \cdot 4} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{0^+ \cdot 4} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

b) La recta $y=0$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 4} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Como la asíntota horizontal coincide con el eje de abscisas, la posición relativa con respecto a la gráfica de la función ya se conoce por el estudio del signo de la función.

¹ Hemos señalado los puntos $x=-2$ y $x=2$ para recordarnos que no pertenecen al dominio de la función.

² Ya que $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \sim a_n \cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x , simplificando a continuación. O por L'Hôpital.

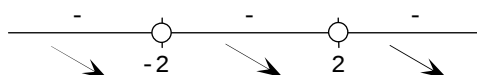
7º) Continuidad. Discontinuidades:

a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-4-x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = \frac{-(x^2+4)}{(x+2)^2(x-2)^2}$$

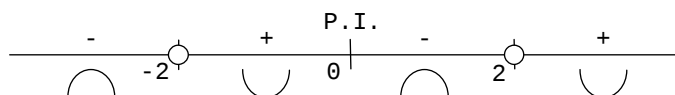
b) La función presenta en $x=-2$ y en $x=2$ discontinuidades de salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

8º) Signo de la derivada primera:¹



9º) Signo de la derivada segunda:²

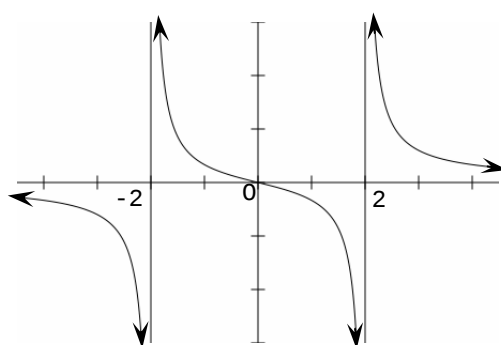
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2x(x^2-4)^2 + (x^2+4)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} = \\ &= \frac{-2x(x^2-4) + 4x(x^2+4)}{(x^2-4)^3} = \frac{-2x^3+8x+4x^3+16x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x(x^2+12)}{(x+2)^3(x-2)^3} \end{aligned}$$



10º) Tabla de valores:

x	y	Clasificación
0	0	Corte con los ejes y punto de inflexión

Gráfica:



¹ Aplicamos aquí el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

² Aplicamos aquí el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.