1) (2p) Define los siguientes conceptos:

a) Función derivada.

b) Función creciente en un punto.

2) (1p) Demuestra que si f es derivable en x_0, es continua en x_0.

3) (1,6p) Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, calcula:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1}$$

4) (1,6p) Deriva y simplifica la función:

$$f(x)=\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

5) (1,8p) Halla las dimensiones (radio de la base y altura) del cilindro de volumen máximo inscrito en una esfera de radio $\sqrt{3}$.

6) (2p) Estudia y representa la gráfica de la función:

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x-1)}$$

[1] Al no disponer de este examen, se ha sustituido por otro. Tampoco es real la fecha.

Ejercicio 3: *Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, calcula:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1}$$ *(1,6 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Consideramos la función:

$$f(x)=x^x$$

Evidentemente:

$$f(1)=1^1=1$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

Ahora bien:

$$f(x)=x^x \overset{1}{=} e^{x\cdot \ln x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=e^{x\cdot \ln x}\cdot(x\cdot \ln x)'=x^x\cdot(\ln x+x\cdot 1/x)=(1+\ln x)\cdot x^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1)=(1+\ln 1)\cdot 1^1=1$$

Por consiguiente:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x-1}=1$$

[1] También puede hallarse la derivada por el método de derivación logarítmica.

Ejercicio 4: *Deriva y simplifica la función:*

$$f(x)=\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(1,6 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}}\cdot\frac{-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1-1}{x^2+1}}}\cdot\frac{-\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}\cdot(x^2+1)}=$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{\frac{x^2(x^2+1)}{x^2+1}}\cdot(x^2+1)}=\frac{-x}{\sqrt{x^2}\cdot(x^2+1)}=\frac{-x}{|x|\cdot(x^2+1)}$$

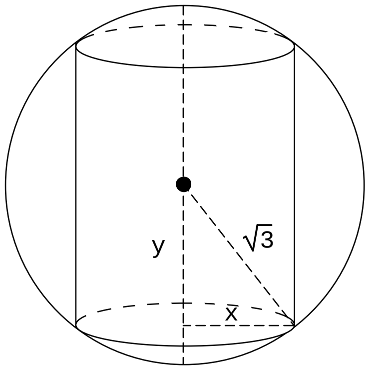
Ejercicio 5: *Halla las dimensiones (radio de la base y altura) del cilindro de volumen máximo inscrito en una esfera de radio $\sqrt{3}$.*

(1,8 PUNTOS)

* * *

Solución:

Sean x e y, respectivamente, la longitud del radio de la base y la mitad de la altura del cilindro:



El volumen del cilindro es máximo:

$$V=\pi x^2\cdot 2y=2\pi x^2 y$$

Tenemos que expresar el volumen en función de una sola variable:

$$x^2+y^2=3 \Rightarrow x^2=3-y^2 \Rightarrow V=2\pi(3-y^2)y=6\pi y-2\pi y^3$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$V'=6\pi-6\pi y^2=0 \Rightarrow 6\pi y^2=6\pi \Rightarrow y^2=1 \overset{1}{\Rightarrow} y=1$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[2] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $y=1$:

$$V''=-12\pi y \Rightarrow V''(1)=-12\pi<0 \Rightarrow V \text{ es máximo para } y=1$$

Si y=1, entonces $x=\sqrt{2}$.

Por tanto, el radio de la base del cilindro mide $\sqrt{2}$ y la altura 2.

---

1 Ya que y>0.

2 También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

Ejercicio 6: Estudia y representa la gráfica de la función:

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x-1)}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dominio: $(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$.

2º) Paridad: como el dominio no es simétrico respecto del origen de coordenadas, la función no es ni par ni impar.

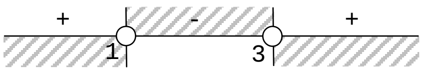
3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: como $y\neq 0$, no hay puntos de corte.

b) Con OY: $x=0 \Rightarrow y=1/3$.

5º) Signo de la función:[1]



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) Las rectas x=1 y x=3 son asíntotas verticales:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{1}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{-2\cdot 0^-}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{-2\cdot 0^+}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{1}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{0^-\cdot 2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{1}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{0^+\cdot 2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

b) La recta y=0 es asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{(x-3)(x-1)}=\frac{1}{(\pm\infty)(\pm\infty)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Como la asíntota horizontal coincide con el eje de abscisas, la posición relativa con respecto a la gráfica de la función ya se conoce por el estudio del signo de la función.

7º) Continuidad. Discontinuidades:

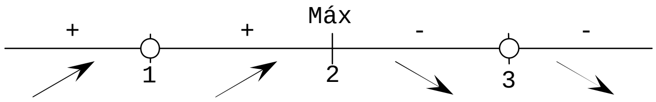
a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

[1] Hemos señalado los puntos x=1 y x=3 para recordarnos que no pertenecen al dominio de la función.

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3} \Rightarrow f'(x)=\frac{-2x+4}{(x-3)^2(x-1)^2}=\frac{2(2-x)}{(x-3)^2(x-1)^2}$$

b) La función presenta en x=1 y x=3 discontinuidades de salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

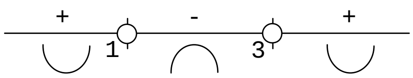
8º) Signo de la derivada primera:[1]



9º) Signo de la derivada segunda:[2]

$$f'(x)=\frac{-2x+4}{(x^2-4x+3)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2(x^2-4x+3)^2-(-2x+4)2(x^2-4x+3)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^4}=$$

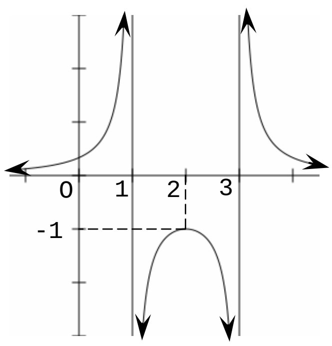
$$=\frac{-2(x^2-4x+3)+2(2x-4)^2}{(x^2-4x+3)^3}=\frac{-2x^2+8x-6+8x^2-32x+32}{(x-3)^3(x-1)^3}=\frac{6x^2-24x+26}{(x-3)^3(x-1)^3}$$



10º) Tabla de valores:

x	y	Clasificación
0	1/3	Corte con OY
2	-1	Máximo

Gráfica:



[1] Aplicamos aquí el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

[2] Aplicamos aquí el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.