

1) (1p) Demuestra la derivada de $f(x)=\sin x$.

2) (1p) Enuncia el teorema de Rolle.

3) (1p) Define función convexa en un punto.

4) (1p) Calcula b y c para que la función f sea continua y derivable en $x=0$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

5) (1p) Deriva y simplifica la siguiente función:

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right) \cdot \arcsin \sqrt{x}+\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x-x^2}$$

6) (1p) Halla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

7) (1p) ¿Cuál es el ángulo del sector circular de perímetro P que tiene área máxima?

8) (1p) Estudia la monotonía, los extremos, la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de $y=(1+x^2) \cdot e^x$.

9) (2p) Estudia y representa la gráfica de la función:

$$f(x)=\frac{x^2+4}{2x}$$

Ejercicio 4: Calcula b y c para que la función f sea continua y derivable en $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

* * *

Solución:

1º) Si f es continua en $x=0$, entonces $c=1$:

- $f(0)=c$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + bx + c) = c$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{1}{=} 1$

2º) Si f es derivable en $x=0$, entonces $b=-1/2$:

- $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + bx + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + b) = b$
- $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \stackrel{4}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} \stackrel{5}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - x}{2x(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -1/2$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada:⁶

- $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + bx + c - c}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + b) = b$
- $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - c}{x} \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - cx}{x^2} \stackrel{4}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - c}{2x} \stackrel{5}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - c - cx}{2x(1+x)} = \frac{1-c}{0^+} \stackrel{7}{\Rightarrow} 1-c=0 \Rightarrow c=1 \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-1-x}{2x(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$

Por tanto, $b=-1/2$; con lo que llegamos al mismo resultado que antes.

¹ Ya que, en $x=0$, $\ln(1+x) \sim x$. Como sale la indeterminación $0/0$ (para obtenerla aplicamos al numerador la regla del límite de la composición), también puede hacerse por L'Hôpital.

² Ya que $c=1$.

³ Multiplicamos numerador y denominador por x .

⁴ Como sale la expresión indeterminada $0/0$, aplicamos L'Hôpital. Para obtener dicha indeterminación hemos aplicado en el numerador la regla del límite de la composición.

⁵ Multiplicamos numerador y denominador por $1+x$.

⁶ Ya que la derivabilidad implica la continuidad.

⁷ Si $1-c \neq 0$, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en $x=0$.

Ejercicio 5: Deriva y simplifica la siguiente función:

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \arcsen \sqrt{x} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x-x^2}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= 1 \cdot \arcsen \sqrt{x} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2x}{2 \cdot \sqrt{x-x^2}} = \\ &= \arcsen \sqrt{x} + \frac{2x-1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} + \frac{1-2x}{4 \cdot \sqrt{x-x^2}} = \\ &= \arcsen \sqrt{x} + \frac{2x-1}{4 \cdot \sqrt{x-x^2}} + \frac{1-2x}{4 \cdot \sqrt{x-x^2}} = \\ &= \arcsen \sqrt{x} + \frac{2x-1+1-2x}{4 \cdot \sqrt{x-x^2}} = \arcsen \sqrt{x} \end{aligned}$$

Aunque el cálculo realizado para obtener la derivada carece de sentido para $x=0$ y $x=1$, el resultado final es aplicable también para ellos. En efecto, como la función f es continua en dichos puntos:¹

- $f'(0) \stackrel{2}{=} f'_+(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \arcsen \sqrt{x} \stackrel{3}{=} 0$
- $f'(1) \stackrel{2}{=} f'_-(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \arcsen \sqrt{x} \stackrel{3}{=} \pi/2$

Por tanto, $f'(x) = \arcsen \sqrt{x}$ y $\text{Dom}(f') = \text{Dom}(f) = [0, 1]$.

¹ Es fácil probarlo.

² Ya que $\text{Dom}(f) = [0, 1]$.

³ Para calcular este límite hemos aplicado la regla del límite de la composición.

Ejercicio 6: Halla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

* * *

(1 PUNTO)

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} &\stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cdot (1 + \sqrt{\cos x})} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2}{x^2 \cdot (1 + \sqrt{\cos x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cdot (1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{2 \cdot (1 + \sqrt{1})} = 1/4 \end{aligned}$$

¹ Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador. También puede hacerse por L'Hôpital.

² Ya que, en $x=0$, $1 - \cos x \sim x^2/2$.

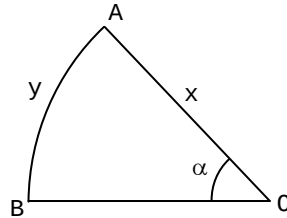
Ejercicio 7: ¿Cuál es el ángulo del sector circular de perímetro P que tiene área máxima?

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Sea OAB el sector circular de ángulo α , radio x y longitud de arco y :



El área del sector tiene que ser máxima:

$$A = \frac{1}{2} \cdot xy$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$P = 2x + y \Rightarrow y = P - 2x \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (P - 2x) = \frac{Px - 2x^2}{2}$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$A' = \frac{P - 4x}{2} = 0 \Rightarrow P - 4x = 0 \Rightarrow 4x = P \Rightarrow x = P/4$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,¹ derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $x = P/4$:

$$A'' = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow A''(P/4) = -2 < 0 \Rightarrow A \text{ es máxima en } x = P/4$$

Por último:

$$x = P/4 \Rightarrow y = P - P/2 = P/2 \stackrel{2}{\Rightarrow} P/2 = \alpha \cdot P/4 \Rightarrow \alpha = \frac{P/2}{P/4} = 2 \text{ rad.}$$

¹ También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

² Ya que el arco es igual al ángulo (medido en radianes) por el radio.

Ejercicio 8: Estudia la monotonía, los extremos, la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de $y=(1+x^2) \cdot e^x$. (1 PUNTO)

* * *

Solución:

a) Para estudiar la monotonía aplicamos el criterio de la derivada primera:

$$y' = 2x \cdot e^x + (1+x^2) \cdot e^x = (x^2+2x+1) \cdot e^x = (x+1)^2 \cdot e^x$$

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
f' es	+	+
f es	creciente	creciente

Como la función f es continua en $x=-1$ (por ser derivable en dicho punto), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera, la función es creciente también en $x=-1$. Por tanto, es creciente en $\mathbb{R}$.

b) Para estudiar la curvatura aplicamos el criterio de la derivada segunda:

$$y'' = 2(x+1) \cdot e^x + (x+1)^2 \cdot e^x = (2+x+1)(x+1)e^x = (x+1)(x+3)e^x$$

Intervalos	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, +\infty)$
f'' es	+	-	+
f es	convexa	cóncava	convexa

Como la función f' es continua en $x=-3$ y $x=-1$ (por ser derivable en dichos puntos), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda,¹ la función tiene puntos de inflexión en $x=-3$ y $x=-1$, de ordenadas respectivas $y=10/e^3$ e $y=2/e$.

¹ El estudio de los puntos de inflexión puede hacerse también con el criterio de la derivada tercera.

Ejercicio 9: Estudia y representa la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2º) Paridad: como el dominio es simétrico respecto del origen de coordenadas, calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+4}{2 \cdot (-x)} = -\frac{x^2+4}{2x} = -f(x)$$

La función es impar.

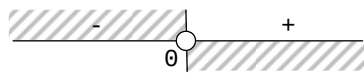
3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX: $y=0 \Rightarrow x^2+4=0 \Rightarrow$ no hay puntos de corte.

b) Con OY: como $x \neq 0$, no hay puntos de corte.

5º) Signo de la función:¹



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) La recta $x=0$ es asíntota vertical:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2+4}{2x} = \frac{4}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2+4}{2x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

b) La recta $y=x/2$ es asíntota oblicua en $-\infty$ y en $+\infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+4}{2x} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{2} = \pm\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+4}{2x^2} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} = 1/2$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2+4}{2x} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+4-x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{2x} = 0$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{x^2+4}{2x} - \frac{x}{2} = \frac{x^2+4-x^2}{2x} = \frac{4}{2x}$$

Por tanto, como la diferencia es negativo en $-\infty$ y positivo en $+\infty$, la función está situada por debajo de la asíntota en $-\infty$ y por encima en $+\infty$.

¹ Hemos señalado el origen para recordarnos que no pertenece al dominio de la función.

² Ya que $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \sim a_n \cdot x^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x , simplificando a continuación. O aplicando L'Hôpital.

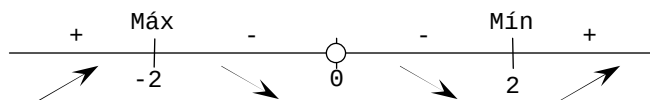
7º) Continuidad. Discontinuidades:

a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

$$f(x) = \frac{x^2+4}{2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot 2x - (x^2+4)2}{4x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 8}{4x^2} = \\ = \frac{2x^2 - 8}{4x^2} = \frac{2(x^2 - 4)}{4x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{2x^2}$$

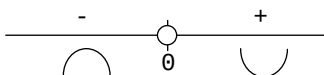
b) La función presenta en $x=0$ una discontinuidad de salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

8º) Signo de la derivada primera:¹



9º) Signo de la derivada segunda:²

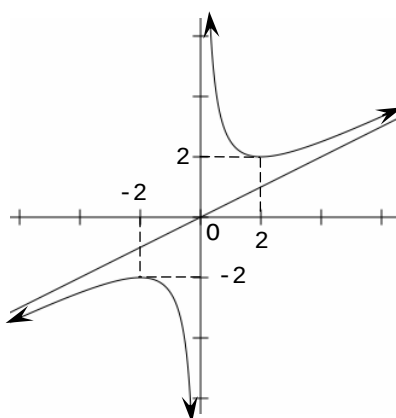
$$f'(x) = \frac{x^2-4}{2x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2x \cdot 2x^2 - (x^2-4) \cdot 4x}{4x^4} = \frac{4x^3 - 4x^3 + 16x}{4x^4} = \frac{4}{x^3}$$



10º) Tabla de valores:

x	y	Clasificación
-2	-2	Máximo
2	2	Mínimo

Gráfica:



¹ Aplicamos aquí el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

² Aplicamos aquí el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.