

1 de diciembre de 2009.

1) (1p) Prueba que si  $f$  y  $g$  son dos funciones derivables en  $x_0$ , se verifica:  $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$ .

2) (1p) Demuestra que la derivada de  $y=a^u$  ( $0 < a \neq 1$ ) es  $y'=a^u \cdot u' \cdot \ln a$ .

3) (1p) Enuncia el criterio de la derivada primera:

a) Para el estudio de la monotonía y los extremos.

b) Para el estudio de la curvatura y de los puntos de inflexión.

4) (1p) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y=x^3$  trazada desde el punto  $P(0,-2)$ .

5) (1p) De todos los rectángulos inscritos en una semicircunferencia de radio 2 cm, halla las dimensiones del que tiene área máxima.

6) (1p) Dada la función  $f(x)=x^{\ln x}$ , demuestra que existe  $\alpha \in (1,e)$  tal que  $f'(\alpha)=1$ . Menciona los resultados teóricos que utilices.

7) (1p) Halla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\ln \cos x}$$

8) (1p) Calcula  $a$  y  $b$  para que la función  $y=(a+bx) \cdot e^{-x}$  tenga un punto de inflexión en  $(0,2)$ .

9) (2p) Estudia y representa la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

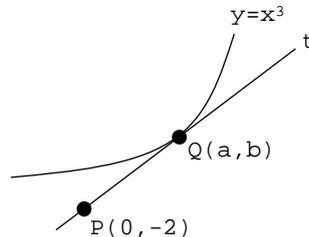
**Ejercicio 4:** Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y=x^3$  trazada desde el punto  $P(0,-2)$ .

(1 PUNTO)

\* \* \*

**Solución:**

El punto  $P$  no pertenece a la curva pues no satisface su ecuación. Sea  $Q(a,b)$  el punto de tangencia:



Como el punto  $Q$  está en la curva, satisface su ecuación:  $b=a^3$ .

Como el punto  $Q$  está en la recta tangente, satisface su ecuación. Ahora bien, de esta recta sólo conocemos el punto  $P$ . Por tanto, su ecuación punto-pendiente es  $y+2=m(x-0)$ . En consecuencia:  $b+2=ma$ .

Por otro lado, la pendiente de la curva en el punto  $Q$  es  $m$ :

$$y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2 \stackrel{1}{\Rightarrow} m=3a^2$$

Por último, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} b=a^3 \\ b+2=ma \\ m=3a^2 \end{cases} \Rightarrow a^3+2=3a^3 \Rightarrow 2a^3=2 \Rightarrow a^3=1 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow m=3$$

Por tanto, la ecuación explícita de la tangente es:

$$y+2=3x \Rightarrow y=3x-2$$

---

<sup>1</sup> En el punto  $Q$ ,  $x=a$  e  $y'=m$ .

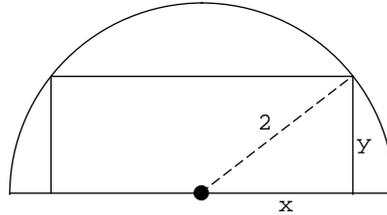
**Ejercicio 5:** De todos los rectángulos inscritos en una semicircunferencia de radio 2 cm, halla las dimensiones del que tiene área máxima.

(1 PUNTO)

\* \* \*

**Solución:**

Sean  $x$  e  $y$ , respectivamente, la mitad de la base y la altura del rectángulo inscrito en la semicircunferencia de radio 2 cm:



El área del rectángulo tiene que ser máxima:

$$A = 2xy$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \stackrel{1}{\Rightarrow} y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow A = 2x \cdot \sqrt{4 - x^2}$$

Como  $A > 0$ , podemos sustituir esta función por su cuadrado:

$$C = 4x^2 \cdot (4 - x^2) = 16x^2 - 4x^4$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$C' = 32x - 16x^3 = 16x \cdot (2 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \stackrel{2}{\Rightarrow} x = \sqrt{2}$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,<sup>3</sup> derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en  $x = \sqrt{2}$ :

$$C'' = 32 - 48x^2 \Rightarrow C''(\sqrt{2}) = 32 - 48 \cdot 2 < 0 \Rightarrow A \text{ es máxima en } x = \sqrt{2}$$

Por tanto, la base es  $2x = 2 \cdot \sqrt{2}$  cm; y la altura,  $y = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$  cm.

<sup>1</sup> Ya que  $y$  es positivo.

<sup>2</sup> Ya que  $x$  es positivo.

<sup>3</sup> También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

**Ejercicio 6:** Dada la función  $f(x)=x^{\ln x}$ , demuestra que existe  $\alpha \in (1, e)$  tal que  $f'(\alpha)=1$ . Menciona los resultados teóricos que utilices.

(1 PUNTO)

\* \* \*

**Solución:**

Primero<sup>1</sup> derivamos la función:

$$f(x) = x^{\ln x} \stackrel{2}{=} e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = x^{\ln x} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \cdot \ln x \cdot x^{\ln x}}{x}$$

\* \* \*

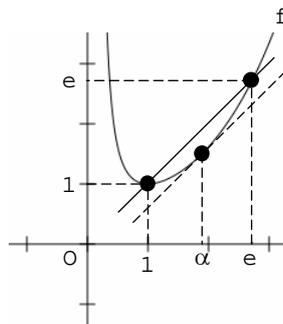
Como la función  $f$  satisface las condiciones del **teorema de Lagrange**,<sup>3</sup> existe  $\alpha$  en el intervalo abierto  $(1, e)$  tal que:

$$f'(\alpha) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{e^{\ln e} - 1^{\ln 1}}{e - 1} = \frac{e - 1}{e - 1} = 1$$

En efecto:

**1<sup>a</sup>)**  $f$  es continua en  $[1, e]$  por ser derivable en  $(0, +\infty)$ .<sup>4</sup>

**2<sup>a</sup>)**  $f$  es derivable en  $(1, e)$  por serlo en  $(0, +\infty)$ .



<sup>1</sup> En realidad el primer cálculo que hay que hacer es  $[f(e) - f(1)] / (e - 1)$ . Como sale 1, podemos aplicar el teorema de Lagrange al intervalo  $[1, e]$ , que es lo que hacemos en el texto.

<sup>2</sup> Aunque se puede derivar la función por el método de derivación logarítmica, también podemos hacerlo escribiéndola primero como función exponencial de base  $e$ .

<sup>3</sup> También podría hacerse el problema probando que la función  $f'$  cumple las condiciones de la propiedad de Darboux o que la función  $g(x) = f'(x) - 1$  cumple las del teorema de Bolzano o que la función  $g(x) = f(x) - x$  cumple las del teorema de Rolle.

<sup>4</sup>  $\text{Dom}(f') = \text{Dom}(f) = (0, +\infty)$ .

Ejercicio 7: Halla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\ln \cos x}$$

\* \* \*

(1 PUNTO)

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\ln \cos x} &\stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{-\operatorname{tg} x} \stackrel{2}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{-(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital. Para obtener dicha indeterminación hemos aplicado al denominador la regla del límite de la composición.

<sup>2</sup> Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse teniendo en cuenta que, en  $x=0$ ,  $1 - \cos x \sim x^2/2$  y  $\operatorname{tag} x \sim x$ .

**Ejercicio 8:** Calcula  $a$  y  $b$  para que la función  $y=(a+bx)\cdot e^{-x}$  tenga un punto de inflexión en  $(0,2)$ .

(1 PUNTO)

\* \* \*

**Solución:**

Teniendo en cuenta la condición necesaria de punto de inflexión, podemos recoger la información en la siguiente tabla:

$x$	$y$	$y'$	$y''$
0	2		0

Como  $y=(a+bx)\cdot e^{-x}$ , entonces:

- $y'=b\cdot e^{-x}+(a+bx)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=(-a+b-bx)\cdot e^{-x}$
- $y''=-b\cdot e^{-x}+(-a+b-bx)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=(a-2b+bx)\cdot e^{-x}$

Como los puntos  $(0,2)$  y  $(0,0)$  pertenecen a las gráficas de las funciones  $y$  e  $y''$ , respectivamente, tenemos lo siguiente:

$$y(0)=2 \Rightarrow a=2$$

$$y''(0)=0 \Rightarrow a-2b=0 \stackrel{1}{\Rightarrow} 2b=2 \Rightarrow b=1$$

---

<sup>1</sup> Ya que  $a=2$ .

**Ejercicio 9:** Estudia y representa la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

(2 PUNTOS)

\* \* \*

1º) Dominio:  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ .

2º) Paridad: como el dominio no es simétrico respecto del origen de coordenadas, la función no es ni par ni impar.

3º) Periodicidad: la función no es periódica.

4º) Cortes con los ejes:

a) Con OX:  $y=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$ .

b) Con OY:  $x=0 \Rightarrow y=0$ .

5º) Signo de la función:<sup>1</sup>



6º) Asíntotas y ramas parabólicas:

a) La recta  $x=1$  es asíntota vertical:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

b) La recta  $y=x+1$  es asíntota oblicua en  $-\infty$  y en  $+\infty$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-1} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1} = \pm\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 + x - x + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1} = 1$$

Posición relativa:

$$f(x) - y = \frac{x^2}{x-1} - x - 1 = \frac{x^2 - x^2 + x - x + 1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

Por tanto, como  $1/(x-1)$  es negativo en  $-\infty$  y positivo en  $+\infty$ , la función está por debajo de la asíntota en  $-\infty$  y por encima en  $+\infty$ .

7º) Continuidad. Discontinuidades:

a) La función es continua en su dominio por ser derivable en él:

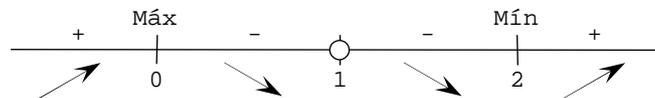
<sup>1</sup> Hemos señalado el punto  $x=1$  para recordarnos que no pertenece al dominio de la función.

<sup>2</sup> Como sale la indeterminación  $\infty/\infty$ , aplicamos L'Hôpital. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de  $x$ , simplificando a continuación. O teniendo en cuenta que  $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n \sim a_n \cdot x^n$  en  $+\infty$  y en  $-\infty$ .

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}$$

**b)** La función presenta en  $x=1$  una discontinuidad de salto infinito (el estudio ya se ha hecho en el apartado anterior).

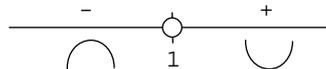
**8º)** Signo de la derivada primera:<sup>1</sup>



**9º)** Signo de la derivada segunda:<sup>2</sup>

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} =$$

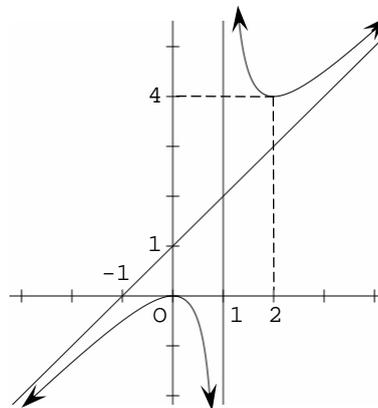
$$= \frac{(2x-2) \cdot (x-1) - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} = \frac{2x^2 - 2x - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$



**10º)** Tabla de valores:

x	y	Clasificación
0	0	Corte con los dos ejes y máximo
2	4	Mínimo

**Gráfica:**



<sup>1</sup> Aplicamos aquí el criterio de la derivada primera y el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

<sup>2</sup> Aplicamos aquí el criterio de la derivada segunda y el criterio de la variación del signo de la derivada segunda.