Índice: Derivada de la función exponencial de base e. Derivada de la función exponencial de base a. Derivada de la función potencial de exponente real. Derivada de las funciones potencial-exponenciales. Problemas.

1.- Derivada de la función exponencial de base e

La función $f(x)=e^x$ es derivable en su dominio, y su derivada es la función $f'(x)=e^x$:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\overset{1}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot(e^h-1)}{h}\overset{2}{=}\lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0}e^x=e^x$$

* * *

La función $y=e^f$ es derivable en todos los puntos de su dominio en los que f sea derivable, y su derivada es $y'=e^f\cdot f'$:

$$y'=(e^f)'\overset{3}{=}[g(f)]'\overset{4}{=}g'(f)\cdot f'\overset{5}{=}e^f\cdot f'$$

* * *

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función $y=e^{\sqrt{1+x}}$:

$$y'=e^{\sqrt{1+x}}\cdot(\sqrt{1+x})'=e^{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{1+x}}\cdot(1+x)'=\frac{e^{\sqrt{1+x}}}{2\cdot\sqrt{1+x}}$$

* * *

Otro ejemplo. Derivemos la función $y=e^{|x-3|}$:

$$y'=e^{|x-3|}\cdot|x-3|'=e^{|x-3|}\cdot\frac{|x-3|}{x-3}\cdot(x-3)'=\frac{|x-3|}{x-3}\cdot e^{|x-3|}=\begin{cases}-e^{3-x} & \text{si } x<3\\ e^{x-3} & \text{si } x>3\end{cases}$$

2.- Derivada de la función exponencial de base a

La función[6] $y=a^x$ es derivable en su dominio, y su derivada es la función $y'=a^x\cdot\ln a$:

$$y'=(a^x)'\overset{7}{=}(e^{x\cdot\ln a})'\overset{8}{=}e^{x\cdot\ln a}\cdot(x\cdot\ln a)'=a^x\cdot 1\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$$

---

[1] Sacamos factor común e^x.
[2] $e^f-1\sim f$ si f es un infinitésimo.
[3] Si $g(x)=e^x$, $g(f)=e^f$.
[4] Ya que, en los puntos indicados, se cumplen las condiciones de la regla de la cadena.
[5] Como $g'(x)=e^x$, entonces $g'(f)=e^f$.
[6] Las bases de las funciones exponenciales son siempre números positivos distintos de 1: $0<a\neq 1$.
[7] Ver el primer problema de la lección L-5.
[8] Ya que $(e^f)'=e^f\cdot f'$.

* * *

La función $y=a^f$ es derivable en todos los puntos de su dominio en los que f sea derivable, y su derivada es $y'=a^f\cdot\ln a\cdot f'$:

$$y'=(a^f)' \overset{1}{=} [g(f)]' \overset{2}{=} g'(f)\cdot f' \overset{3}{=} a^f\cdot\ln a\cdot f'$$

* * *

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función $y=5^{x+\ln x}$:

$$y'=5^{x+\ln x}\cdot\ln 5\cdot(x+\ln x)'=5^{x+\ln x}\cdot\ln 5\cdot(1+1/x)=\frac{\ln 5\cdot(x+1)\cdot 5^{x+\ln x}}{x}$$

3.- Derivada de la función potencial de exponente real[4]

La función $y=x^r$ es derivable en su dominio,[5] y su derivada es la función $y'=r\cdot x^{r-1}$:

$$y'=(x^r)'=(e^{r\cdot\ln x})'=e^{r\cdot\ln x}\cdot(r\cdot\ln x)'=x^r\cdot r\cdot(1/x)=r\cdot x^{r-1}$$

* * *

La función $y=f^r$ es derivable en todos los puntos de su dominio[6] en los que f sea derivable, y su derivada es la función $y'=r\cdot f^{r-1}\cdot f'$:

$$y'=(f^r)' \overset{7}{=} [g(f)]' \overset{2}{=} g'(f)\cdot f' \overset{8}{=} r\cdot f^{r-1}\cdot f'$$

* * *

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función $y=(\ln x)^\pi$:

$$y'=\pi\cdot(\ln x)^{\pi-1}\cdot(\ln x)'=\pi\cdot(\ln x)^{\pi-1}\cdot 1/x=\frac{\pi\cdot(\ln x)^{\pi-1}}{x}$$

4.- Derivada de las funciones potencial-exponenciales

La función $y=f^g$ es derivable en todos los puntos de su dominio[9] en los que f y g sean derivables, y su derivada se calcula sustituyéndola por la función exponencial $y=e^{g\cdot\ln f}$.

* * *

Por ejemplo, calculemos la derivada de $y=x^x$:

---

[1] Si $g(x)=a^x$, $g(f)=a^f$.
[2] Ya que, en los puntos indicados, se cumplen las condiciones de la regla de la cadena.
[3] Como $g'(x)=a^x\cdot\ln a$, entonces $g'(f)=a^f\cdot\ln a$.
[4] Las funciones potenciales de exponente entero y las funciones irracionales ya las hemos estudiado en las lecciones anteriores.
[5] Su dominio es $(0,+\infty)$.
[6] Su dominio es $\{x\in \mathrm{Dom}(f)\,|\,f(x)>0\}$.
[7] Si $g(x)=x^r$, $g(f)=f^r$.
[8] Como $g'(x)=r\cdot x^{r-1}$, entonces $g'(f)=r\cdot f^{r-1}$.
[9] $\mathrm{Dom}(f^g)=\{x\in \mathrm{Dom}(f)\cap \mathrm{Dom}(g)\,|\,f(x)>0\}$.

$$y'=(x^x)'=(e^{x\cdot\ln x})'=e^{x\cdot\ln x}\cdot(x\cdot\ln x)'=x^x\cdot(\ln x+x\cdot 1/x)=(1+\ln x)\cdot x^x$$

* * *

Como las funciones exponenciales de base a, las potenciales de exponente real y las potencial-exponenciales se pueden escribir como funciones exponenciales de base e, sabemos que son derivables (lo hemos visto en el apartado 1). Por tanto, sus derivadas también pueden obtenerse por el método de derivación logarítmica.

5.- Problemas

1) Deriva la siguiente función e indica en qué puntos no es derivable:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x<0 \\ e^x-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

2) Halla la tangente y la normal a la curva $y^x=x^y$ en el punto (1,1).

3) Si A y B son constantes, prueba que la función $y=Ae^{-x}+Be^{-2x}$ satisface la ecuación $y''+3y'+2y=0$.

4) Deriva las siguientes funciones:

a) $y=x^\pi+x^e+2x^2+\ln x$ **b)** $y=\dfrac{\ln x}{a^x}$ **c)** $y=e^{x^2}$

d) $y=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ **e)** $y=\left(\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{2x}\right)\cdot e^x$ **f)** $y=e^{x\cdot\ln x}$

g) $y=\dfrac{3x^2-2x}{e^x}$ **h)** $y=5^{x^3-8x}$ **i)** $y=(x^2-1)\cdot e^{-2x}$

j) $y=\ln\dfrac{e^x}{e^x-1}$ **k)** $y=e^{2x}\cdot\ln(1/x)$ **l)** $y=a^{5x^2}$

m) $y=5^x+6\cdot 3^x$ **n)** $y=\dfrac{3x^2-2x}{e^x}$ **ñ)** $y=x^3\cdot e^{3x}$

o) $y=e^{e^x}$ **p)** $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$ **q)** $y=e^{\sqrt{x}}$

r) $y=x^2\cdot e^{-a/x}$ **s)** $y=x\cdot e^{-x^2/2}$ **t)** $y=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$

5) Deriva las siguientes funciones:

a) $y=x^{1/x}$ **b)** $y=x^{\sqrt{x}}$ **c)** $y=x^{\ln x}$

d) $y=x^{x^2-1}\cdot(x^2-1)$ **e)** $y=(\ln x)^{\ln x}$ **f)** $y=5^{x^x}$

g) $y=(\ln x)^x$ **h)** $y=(a/x)^x$ **i)** $y=(1+\ln^2 x)^{e^x}$

6) Halla las ecuaciones de la tangente y de la normal a las siguientes curvas en los puntos indicados:

a) $y=(x+3)^{x+2}$ en $x=-2$ **b)** $y=3^{6x+1}$ en $x=0$

7) Calcula la derivada enésima de la función $y=x\cdot e^x$.

8) Halla el dominio de derivabilidad de la función $y=(\sqrt{x}-1)\cdot(e^x-1)$.