*Índice: Derivada de la suma de funciones. Derivada del producto de funciones. Consecuencias. Problemas.*

## 1.- Derivada de la suma de funciones

Si f y g son derivables en $x_0$, entonces f+g también es derivable en $x_0$, y su derivada en dicho punto es $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$:

$$(f+g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\overset{1}{=}f'(x_0)+g'(x_0)$$

Por tanto, la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de sus derivadas:

$$(f+g)'=f'+g'$$

Por comodidad, utilizaremos esta notación en lugar de la que aparece en el enunciado de la propiedad que acabamos de demostrar. Sin embargo, es falsa, pues se trata de funciones cuyos dominios puede que no coincidan, ya que, en general, $Dom(f'+g')\subset Dom(f+g)'$.

Conviene también advertir que, cuando en dicho enunciado se afirma que "si f y g son derivables en $x_0$, entonces f+g también es derivable en $x_0$", se está afirmando, y es lo que hemos demostrado más arriba, que f+g es derivable en $Dom(f'+g')=Dom(f')\cap Dom(g')$, pero no que *sólo* lo sea en dicho conjunto.[2]

* * *

Por ejemplo:

$$(x+\sqrt{x})'=x'+(\sqrt{x})'=1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}=\frac{2\cdot\sqrt{x}+1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Si $f(x)=x$ y $g(x)=\sqrt{x}$, es evidente que $Dom(f')=R$ y $Dom(g')=(0,+\infty)$. Por consiguiente, $Dom(f'+g')=Dom(f')\cap Dom(g')=(0,+\infty)$. En este caso, pues, $Dom(f+g)'=Dom(f'+g')$.

* * *

En general:

$$(f_1+f_2+\ldots+f_n)'=f_1'+f_2'+\ldots+f_n'$$

[1] Por las propiedades de los límites y la definición de derivada.
[2] Valga lo dicho aquí (no lo repetiremos, pues) para las fórmulas similares, esto es, las relativas a la derivada de la resta, el producto, el cociente, la potencia, la composición, etc., así como para sus correspondientes enunciados.

## 2.- Derivada del producto de funciones

Si f y g son derivables en $x_0$, entonces $f\cdot g$ también, y su derivada en dicho punto es $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$:

$$(f\cdot g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}\overset{1}{=}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{[f(x)-f(x_0)]\cdot g(x)+f(x_0)\cdot[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\overset{2}{=}$$

$$=f'(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)\cdot g'(x_0)\overset{3}{=}f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Por tanto, la derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más la primera sin derivar por la derivada de la segunda:

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$

* * *

Por ejemplo:

$$(x\cdot\sqrt{x})'=x'\cdot\sqrt{x}+x\cdot(\sqrt{x})'=1\cdot\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{x}{2\cdot\sqrt{x}}=\frac{2x+x}{2\cdot\sqrt{x}}=\frac{3x}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Si $f(x)=x$ y $g(x)=\sqrt{x}$, como $Dom(f')=R$ y $Dom(g')=(0,+\infty)$, resulta que $Dom(f'\cdot g+f\cdot g')\overset{4}{=}Dom(f')\cap Dom(g')=(0,+\infty)$. Ahora bien, es fácil probar[5] que la derivada lateral derecha de $x\cdot\sqrt{x}$ en $x=0$ es 0. Por consiguiente, $Dom(f\cdot g)'=[0,+\infty)$. En este caso, pues, $Dom(f'\cdot g+f\cdot g')\subset Dom(f\cdot g)'$.

Por tanto:

$$(x\cdot\sqrt{x})'=3\cdot\sqrt{x}/2$$

* * *

En general:

$$(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)'=f_1'\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n+f_1\cdot f_2'\cdot\ldots\cdot f_n+\ldots+f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n'$$

[1] Sumamos y restamos al numerador $f(x_0)\cdot g(x)$.
[2] Por las propiedades de los límites y la definición de derivada.
[3] El primer límite es $g(x_0)$, ya que g es continua en $x_0$ (por ser derivable en $x_0$); el segundo límite, al tratarse del límite de una constante, es $f(x_0)$.
[4] $Dom(f'\cdot g+f\cdot g')=Dom(f'\cdot g)\cap Dom(f\cdot g')=Dom(f')\cap Dom(g)\cap Dom(f)\cap Dom(g')=Dom(f')\cap Dom(g')$, ya que $Dom(f')\subset Dom(f)$ y $Dom(g')\subset Dom(g)$.
[5] Mediante la definición.

En efecto:[1]

1º) La fórmula anterior es cierta para n=2 (acabamos de demostrarlo): $(f_1\cdot f_2)'=f_1'\cdot f_2+f_1\cdot f_2'$.

2º) *Si* la fórmula *fuese* cierta para n, *entonces* sería cierta también para n+1:

$$(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n\cdot f_{n+1})' \overset{2}{=} (f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)'\cdot f_{n+1}+(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)\cdot f_{n+1}' \overset{3}{=}$$

$$=(f_1'\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n+f_1\cdot f_2'\cdot\ldots\cdot f_n+\ldots+f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n')\cdot f_{n+1}+f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n\cdot f_{n+1}'=$$

$$=f_1'\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n\cdot f_{n+1}+f_1\cdot f_2'\cdot\ldots\cdot f_n\cdot f_{n+1}+\ldots+f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n'\cdot f_{n+1}+f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n\cdot f_{n+1}'$$

## 3.- Consecuencias

**1ª)** La derivada del producto de un número por una función es igual al producto del número por la derivada de la función:

$$(k\cdot f)' \overset{4}{=} k'\cdot f+k\cdot f'=0\cdot f+k\cdot f'=k\cdot f'$$

Evidentemente, el dominio de derivabilidad de $k\cdot f$ es el mismo que el de f.

**2ª)** La derivada de la opuesta de una función es igual a la opuesta de su derivada:

$$(-f)'=(-1\cdot f)'=-1\cdot f'=-f'$$

Evidentemente, el dominio de derivabilidad de -f es el mismo que el de f.

**3ª)** La derivada de una resta de funciones es igual a la resta de sus derivadas:

$$(f-g)'=[f+(-g)]'=f'+(-g)'=f'+(-g')=f'-g'$$

Evidentemente, f-g es derivable allí donde lo sean f y g.[5]

* * *

Por ejemplo, vamos a calcular la derivada de la función polinómica $f(x)=3x^4-5x+8$:

$$f'(x)=(3x^4)'-(5x)'+8'=3\cdot(x^4)'-5\cdot x'+0=3\cdot 4x^3-5\cdot 1=12x^3-5$$

---

[1] Esta fórmula se demuestra por inducción completa.

[2] Aplicamos la derivada del producto de dos funciones: $f=f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n$ y $g=f_{n+1}$.

[3] Si la fórmula fuese cierta para n, podríamos utilizarla y sustituir $(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)'$ por su valor.

[4] Consideramos el número k como la función constante g(x)=k.

[5] Observa que lo que se dice es que f-g es derivable en $\mathrm{Dom}(f'-g')=\mathrm{Dom}(f')\cap\mathrm{Dom}(g')$, pero no que sea derivable *sólo* en dicho conjunto, pues, como se ha indicado en el primer apartado de esta lección, $\mathrm{Dom}(f'-g')\subset\mathrm{Dom}(f-g)'$.

## 4.- Problemas

**1)** Demuestra la fórmula $(f_1+f_2+\ldots+f_n)'=f_1'+f_2'+\ldots+f_n'$ por inducción completa.

**2)** Halla la tangente y la normal en el punto de abscisa $x=0$ a la gráfica de la función $y=3x^3+6(x-1)^2+8x^2+3$.

**3)** Calcula las ecuaciones de las tangentes a las siguientes curvas paralelas a la recta r:

**a)** $y=3x^2-5$, $r\equiv y=x+1$ **b)** $y=6x^3+9x-2$, $r\equiv y=0$

**4)** Encuentra la recta que pasa por el punto (1,2) y es paralela a la tangente a la curva $y=x^3-2x+6$ en el punto (0,6).

**5)** Halla la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx+c$ si pasa por P(1,3) y es tangente en (0,0) a la bisectriz del primer cuadrante.

**6)** Calcula el ángulo con el que se cortan la recta $y=x+1$ y la curva $y=x^3+x-7$.

**7)** Halla a y b para que f sea continua y derivable. Encuentra los puntos en los que la recta tangente es paralela al eje OX.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq 1 \\ -x^2+ax+b & \text{si } x>1 \end{cases}$$

**8)** Encuentra los puntos de la gráfica de la función $y=x^2+6x$ en los que la tangente forma un ángulo de 45º con el eje OX.

**9)** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y=\sqrt[3]{x}-x$ trazada desde el punto P(-2,2).

**10)** Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $y=x^2-4$ trazada desde el punto P(4,-1/2).

**11)** La recta $2x-3y+4=0$ corta a la parábola $y^2=4x$ en dos puntos. Calcula: a) las ecuaciones de las tangentes y normales en dichos puntos; b) los puntos donde se cortan las dos tangentes y las dos normales; c) los ángulos que forman las tangentes y las normales, y d) el área del cuadrilátero cuyos lados son las tangentes y las normales.