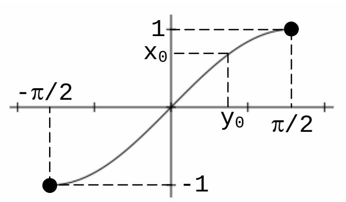
Índice: Derivada de la función arco seno. Derivada de la función arco coseno. Derivada de la función arco cosecante. Derivada de las demás funciones trigonométricas recíprocas. Problemas.

1.- Derivada de la función arco seno

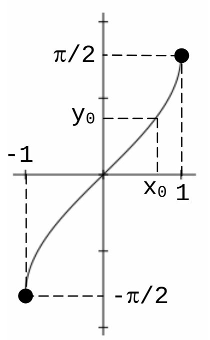
Recuerda que la función seno restringida al intervalo $[-\pi/2,\pi/2]$ es inyectiva y que su recíproca es la función arco seno:

- $\operatorname{arc\,sen} x=y \Leftrightarrow \operatorname{sen} y=x$
- $\operatorname{Dom}(\operatorname{arc\,sen})=[-1,1]$

Recuerda también que sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes:[1]



Gráf(sen)



Gráf(arc sen)

* * *

La función $f(x)=\operatorname{arc\,sen} x$ es derivable en el intervalo $(-1,1)$, y su derivada es $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$f'(x_0) \overset{2}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x-\operatorname{arc\,sen} x_0}{x-x_0} \overset{3}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x-y_0}{x-\operatorname{sen} y_0}=$$

$$\overset{4}{=} \lim_{y\to y_0}\frac{y-y_0}{\operatorname{sen} y-\operatorname{sen} y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} y-\operatorname{sen} y_0}{y-y_0}} \overset{5}{=} \frac{1}{\cos y_0} \overset{6}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y_0}}=\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$$

* * *

La función $y=\operatorname{arc\,sen} f$ es derivable en todos los puntos de su dominio en los que f es derivable, siempre que $f(x)\in(-1,1)$, y su deriva-

[1] Si dibujas en una cuartilla cualquiera de esas dos gráficas y la miras al trasluz desde la otra cara de la cuartilla, tomando como semieje positivo de abscisas el semieje positivo de ordenadas de la que has dibujado, verás la gráfica de su recíproca. De esta manera podemos reducirnos a dibujar sólo una de las dos gráficas.

[2] $x_0\in(-1,1)$.

[3] Si $x_0\in(-1,1)$: $\operatorname{arc\,sen} x_0=y_0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} y_0=x_0$.

[4] Hacemos el cambio de variable $x=\operatorname{sen} y$. Observa que la función seno restringida al intervalo $[-\pi/2,\pi/2]$ es inyectiva, y que el límite de su recíproca en x_0 es y_0 (por ser la función arco seno continua en x_0): $\lim\limits_{x\to x_0} y=\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{arc\,sen} x=\operatorname{arc\,sen} x_0=y_0$. Por tanto, se cumplen las condiciones que se requieren para hallar este límite mediante dicho cambio de variable (ver lección L-8).

[5] El límite del denominador es la derivada de la función seno en y_0.

[6] Como $y_0\in(-\pi/2,\pi/2)$, $\cos y_0>0$.

da es la función $y'=\frac{1}{\sqrt{1-f^2}}\cdot f'$:

$$y'=(\mathrm{arc\,sen}\,f)' \stackrel{1}{=} \mathrm{arc\,sen}'(f)\cdot f' \stackrel{2}{=} \frac{1}{\sqrt{1-f^2}}\cdot f'$$

* * *

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función $y=\mathrm{arc\,sen}(1/x)$.

$$y' \stackrel{3}{=} \frac{1}{\sqrt{1-(1/x)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2} \stackrel{4}{=}$$

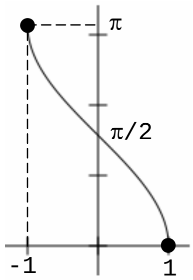
$$=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-1/x^2}}\cdot\frac{-1}{|x|^2}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{-1}{|x|^2}=\frac{-1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}$$

2.- Derivada de la función arco coseno

Recuerda que la función coseno restringida al intervalo $[0,\pi]$ es inyectiva y que su recíproca es la función arco coseno:

- $\mathrm{arc\,cos}\,x=y \Leftrightarrow \cos y=x$
- $\mathrm{Dom}(\mathrm{arc\,cos})=[-1,1]$

Recuerda también que sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes:[5]



Gráf(arc cos)

* * *

La función $f(x)=\mathrm{arc\,cos}\,x$ es derivable en el intervalo (-1,1), y su derivada es $f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$y=\mathrm{arc\,cos}\,x \Rightarrow \cos y=x \Rightarrow \mathrm{sen}[(\pi/2)-y]=x \Rightarrow (\pi/2)-y=\mathrm{arc\,sen}\,x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\pi/2-\mathrm{arc\,sen}\,x \Rightarrow y'=0-(\mathrm{arc\,sen}\,x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

[1] Ya que, en los puntos indicados, se cumplen las condiciones de la regla de la cadena.
[2] Como $\mathrm{arc\,sen}'(x)=1/\sqrt{1-x^2}$, entonces $\mathrm{arc\,sen}'(f)=1/\sqrt{1-f^2}$.
[3] Aplicamos directamente la fórmula obtenida. En este caso, $f(x)=1/x$.
[4] Multiplicamos y dividimos por $\sqrt{x^2}$.
[5] La gráfica de la función coseno restringida al intervalo $[0,\pi]$ puedes verla como se indica en la nota 1 de la página anterior.

* * *

La función $y=\mathrm{arc\,cos}\,f$ es derivable en todos los puntos de su dominio en los que f es derivable, siempre que $f(x)\in(-1,1)$, y su derivada es $y'=\frac{-1}{\sqrt{1-f^2}}\cdot f'$:

$$y'=(\mathrm{arc\,cos}\,f)' \overset{1}{=} \mathrm{arc\,cos}'(f)\cdot f' \overset{2}{=} \frac{-1}{\sqrt{1-f^2}}\cdot f'$$

* * *

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función $y=\mathrm{arc\,cos}\sqrt{x}$:

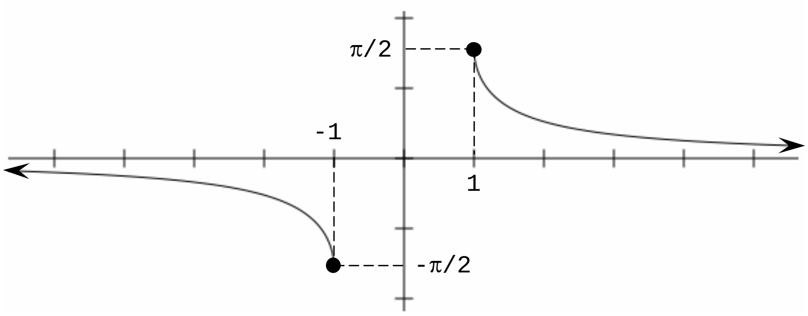
$$y' \overset{3}{=} \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{-1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{x-x^2}}$$

3.- Derivada de la función arco cosecante

La función cosecante restringida a $[-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2]$ es inyectiva, y su recíproca es la función arco cosecante:

- $\mathrm{arc\,cosec}\,x=y \Leftrightarrow \mathrm{cosec}\,y=x$
- $\mathrm{Dom}(\mathrm{arc\,cosec})=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Recuerda también que sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes:



Gráf(arc cosec)

* * *

La función $f(x)=\mathrm{arc\,cosec}\,x$ es derivable en la unión de intervalos abiertos $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, y su derivada es $f'(x)=\frac{-1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}$:

$$y=\mathrm{arc\,cosec}\,x \Rightarrow \mathrm{cosec}\,y=x \overset{4}{\Rightarrow} \frac{1}{\mathrm{sen}\,y}=x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{sen}\,y=\frac{1}{x} \Rightarrow y=\mathrm{arc\,sen}\frac{1}{x} \overset{5}{\Rightarrow} y'=\frac{-1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}$$

---

[1] Ya que, en los puntos indicados, se cumplen las condiciones de la regla de la cadena.
[2] Como $\mathrm{arc\,cos}'(x)=-1/\sqrt{1-x^2}$, entonces $\mathrm{arc\,cos}'(f)=-1/\sqrt{1-f^2}$.
[3] Aplicamos directamente la fórmula obtenida. En este caso, $f(x)=\sqrt{x}$.
[4] Observa que $\mathrm{sen}\,y\neq0$, ya que $y\in(-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2)$.
[5] Esta derivada la hemos calculado en el primer apartado de esta lección.

* * *

La función $y=\operatorname{arc\,cosec} f$ es derivable en todos los puntos de su dominio en los que f es derivable, siempre que $f(x)\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, y su derivada es $y'=\frac{-1}{|f|\cdot\sqrt{f^2-1}}\cdot f'$:

$$y'=(\operatorname{arc\,cosec} f)' \overset{1}{=} \operatorname{arc\,cosec}'(f)\cdot f' \overset{2}{=} \frac{-1}{|f|\cdot\sqrt{f^2-1}}\cdot f'$$

* * *

Como ya hemos hecho más de una vez, antes de derivar una función conviene en ocasiones modificarla.

Por ejemplo, calculemos la derivada de $y=\operatorname{sen}\operatorname{arc\,cosec} x$:

$$y=\operatorname{sen}\operatorname{arc\,cosec} x \overset{3}{=} \operatorname{sen} f \overset{4}{=} \frac{1}{x} \Rightarrow y'=\frac{-1}{x^2}$$

La derivada de la función sin modificarla previamente no nos evita estas transformaciones:

$$y=\operatorname{sen}\operatorname{arc\,cosec} x \Rightarrow y'=\cos\operatorname{arc\,cosec} x\cdot(\operatorname{arc\,cosec} x)'=$$

$$=\cos\operatorname{arc\,cosec} x\cdot\frac{-1}{|x|\cdot\sqrt{x^2-1}}=\ldots$$

Como se ve, queda aún la tarea de transformar $\cos\operatorname{arc\,cosec} x$ (y simplificar).

4.- Derivada de las demás funciones trigonométricas recíprocas

Las definiciones de las funciones arco tangente, arco cotangente y arco secante son similares a las anteriores. Sus gráficas las puedes obtener con cualquier programa de representación de funciones que tengas en tu ordenador.[5] Por último, la demostración de la derivada de la función arco tangente es idéntica a la de la función arco seno; la de la función arco cotangente se basa en la de la arco tangente,[6] basta con probar la siguiente propiedad: $\operatorname{ctg} y=\operatorname{tg}(\pi/2-y)$; y la de la función arco secante se hace igual que la de la función arco cosecante, aunque también se puede demostrar a partir de la derivada de esta última si primero pruebas que $\sec y=\operatorname{cosec}(\pi/2-y)$.

---

[1] Ya que, en los puntos indicados, se cumplen las condiciones de la regla de la cadena.
[2] Como $\operatorname{arc\,cosec}'(x)=-1/(|x|\cdot\sqrt{x^2-1})$, entonces $\operatorname{arc\,cosec}'(f)=-1/(|f|\cdot\sqrt{f^2-1})$.
[3] Hacemos el cambio: $\operatorname{arc\,cosec} x=f$.
[4] $\operatorname{arc\,cosec} x=f \Rightarrow \operatorname{cosec} f=x \Rightarrow 1/\operatorname{sen} f=x \Rightarrow \operatorname{sen} f=1/x$.
[5] Puedes utilizar también el programa *online fooplot*. Salvo para la gráfica de la función arco cotangente, pues ha definido esta función como la recíproca de la función cotangente restringida a la unión de intervalos $(-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2)$, mientras que nosotros la restringimos al intervalo $(0,\pi)$. Tampoco es de fiar en las funciones irracionales.
[6] Igual que la de la arco coseno se basaba en la de la arco seno.

5.- Problemas

1) Calcula la derivada de las funciones $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$ y $\operatorname{arc\,sec} x$.

2) Halla la derivada de las funciones $\operatorname{arc\,tg} f$, $\operatorname{arc\,ctg} f$ y $\operatorname{arc\,sec} f$.

3) Deriva las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}$ **b)** $y=\operatorname{sen} \operatorname{arc\,tg} x$ **c)** $y=\sqrt{1+\operatorname{arc\,sen} x}$

d) $y=\operatorname{sen} \operatorname{arc\,cos} x$ **e)** $y=\dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}$ **f)** $y=\operatorname{tg} \operatorname{arc\,sen} x$

g) $y=\cos \operatorname{arc\,tg} x$ **h)** $y=\operatorname{arc\,ctg} \ln x$ **i)** $y=\dfrac{\operatorname{arc\,cos} x}{\sqrt{1-x^2}}$

j) $y=\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{arc\,tg} x}$ **k)** $y=\ln \operatorname{arc\,tg} x$ **l)** $y=\operatorname{cosec} \operatorname{arc\,ctg} x$

4) Deriva las siguientes funciones:

a) $y=\operatorname{arc\,cos} x^3$ **b)** $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

c) $y=\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **d)** $y=\ln(\operatorname{tg} x+\sec x)$

e) $y=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}$ **f)** $y=\operatorname{arc\,cos}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

g) $y=\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1+x^2}}$ **h)** $y=(\operatorname{arc\,cos} e^x)^2$

i) $y=\operatorname{arc\,sen} e^x$ **j)** $y=\operatorname{arc\,sec}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

k) $y=\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ **l)** $y=\operatorname{arc\,ctg}(x^2-3)$

m) $y=\operatorname{arc\,cos}(e^x+5^x)$ **n)** $y=\operatorname{arc\,cosec}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

ñ) $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1+\sec x}{1-\sec x}$ **o)** $y=\operatorname{arc\,tg}(e^x+6x^2-\ln x)$

p) $y=\operatorname{arc\,cos}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ **q)** $y=x\cdot\operatorname{arc\,tg} x-\dfrac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2)$

r) $y=\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}$ **s)** $y=\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x^2-1}{x^2}$

t) $y=\sqrt{2}\cdot\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}-x$ **u)** $y=\dfrac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{5\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}$

5) Deriva las siguientes funciones:

a) $y=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{arc\,tg} x}$ **b)** $y=(\operatorname{arc\,tg} x)^x$ **c)** $y=(\operatorname{arc\,cos} x)^{1/x^2}$

d) $y=e^{\operatorname{arc\,tg} x}$ **e)** $y=(\ln x)^{\operatorname{arc\,sec} x}$ **f)** $y=(\operatorname{arc\,tg} x)^{\operatorname{arc\,sen} x}$

6) Halla y' si $\operatorname{arc\,tg}(x+y)=x$.

7) Calcula la tangente a la curva $\operatorname{arc\,tg}(y/x)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ en el punto P(1,0).

8) Halla el orden de contacto de las funciones $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\operatorname{arc\,sen} x$ en el origen de coordenadas.