

Índice: Derivada de la función seno. Derivada de la función coseno. Derivada de las demás funciones trigonométricas. Problemas.

### 1.- Derivada de la función seno

La función  $f(x)=\text{sen } x$  es derivable en su dominio, y su derivada es  $f'(x)=\text{cos } x$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h)-\text{sen } x}{h} \stackrel{1}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \text{sen} \frac{h}{2}}{h} \stackrel{2}{=} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos \frac{2x+h}{2} \cdot \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{2x+h}{2} \stackrel{3}{=} \cos \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x+h}{2} = \cos \frac{2x}{2} = \cos x \end{aligned}$$

\* \* \*

La función  $y=\text{sen } f$  es derivable en todos los puntos de su dominio en los que  $f$  sea derivable, y su derivada es  $y'=\text{cos } f \cdot f'$ :

$$y'=(\text{sen } f)' \stackrel{4}{=} \text{sen}'(f) \cdot f' \stackrel{5}{=} \text{cos } f \cdot f'$$

\* \* \*

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función  $y=\text{sen} \sqrt{\text{sen } \sqrt{x}}$ :

$$\begin{aligned} y' &= \text{cos} \sqrt{\text{sen} \sqrt{x}} \cdot (\sqrt{\text{sen} \sqrt{x}})' = \\ &= \text{cos} \sqrt{\text{sen} \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\text{sen} \sqrt{x}}} (\text{sen} \sqrt{x})' = \frac{\text{cos} \sqrt{\text{sen} \sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{\text{sen} \sqrt{x}}} \cdot \text{cos} \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = \\ &= \frac{\text{cos} \sqrt{x} \cdot \text{cos} \sqrt{\text{sen} \sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{\text{sen} \sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{\text{cos} \sqrt{x} \cdot \text{cos} \sqrt{\text{sen} \sqrt{x}}}{4 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{\text{sen} \sqrt{x}}} \end{aligned}$$

### 2.- Derivada de la función coseno

La función  $y=\text{cos } x$  es derivable en su dominio, y su derivada es la función  $y'=-\text{sen } x$ :

$$y'=(\text{cos } x)' \stackrel{6}{=} [\text{sen}(\pi/2-x)]' = \text{cos}(\pi/2-x) \cdot (\pi/2-x)' \stackrel{7}{=} \text{sen } x \cdot (-1) = -\text{sen } x$$

<sup>1</sup> Por los teoremas de adición, vistos el curso pasado (ver *Resúmenes*, en este *blog*).

<sup>2</sup> Ya que  $\text{sen } f \sim f$  si  $f$  es un infinitésimo.

<sup>3</sup> Ya que se cumple la segunda condición del límite de la composición (ver L-8), pues la función coseno es continua en su dominio.

<sup>4</sup> Ya que, en los puntos indicados, se cumplen las condiciones de la regla de la cadena.

<sup>5</sup> Como  $\text{sen}'(x)=\text{cos } x$ ,  $\text{sen}'(f)=\text{cos } f$ .

<sup>6</sup> Aplicamos la fórmula del seno de la resta:  $\text{sen}(\pi/2-x)=\text{sen}(\pi/2) \cdot \text{cos } x - \text{cos}(\pi/2) \cdot \text{sen } x = \text{cos } x$ .

<sup>7</sup> Aplicamos la del coseno de la resta:  $\text{cos}(\pi/2-x)=\text{cos}(\pi/2) \cdot \text{cos } x + \text{sen}(\pi/2) \cdot \text{sen } x = \text{sen } x$ .

\* \* \*

La función  $y=\cos f$  es derivable en todos los puntos de su dominio en los que  $f$  sea derivable, y su derivada es la función  $y'=-\operatorname{sen} f \cdot f'$ :

$$y'=(\cos f)' \stackrel{1}{=} \cos'(f) \cdot f' \stackrel{2}{=} -\operatorname{sen} f \cdot f'$$

\* \* \*

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función  $y=\cos \ln \operatorname{sen} x$ :

$$\begin{aligned} y' &= -\operatorname{sen} \ln \operatorname{sen} x \cdot (\ln \operatorname{sen} x)' = -\operatorname{sen} \ln \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot (\operatorname{sen} x)' = \\ &= \frac{-\operatorname{sen} \ln \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x = -\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{sen} \ln \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

### 3.- Derivada de las demás funciones trigonométricas

La función  $y=\operatorname{tg} x$  es derivable en su dominio, y su derivada es la función  $y'=1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ :

$$y'=(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

De aquí salen los dos resultados mencionados.

\* \* \*

La función  $y=\operatorname{tg} f$  es derivable en todos los puntos de su dominio en los que  $f$  sea derivable, y su derivada es  $y'=(1+\operatorname{tg}^2 f) \cdot f' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$ :

$$y'=(\operatorname{tg} f)' \stackrel{1}{=} \operatorname{tg}'(f) \cdot f' \stackrel{3}{=} (1+\operatorname{tg}^2 f) \cdot f' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$$

\* \* \*

Del mismo modo se demuestran las fórmulas de las derivadas de las funciones secante, cosecante y cotangente.

\* \* \*

Por ejemplo, calculemos la derivada de la función  $y=\sqrt{\operatorname{tg}^3(x^2+5)}$ :

$$\begin{aligned} y &= [\operatorname{tg}(x^2+5)]^{3/2} \Rightarrow y' = \frac{3}{2} \cdot [\operatorname{tg}(x^2+5)]^{1/2} \cdot [\operatorname{tg}(x^2+5)]' = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(x^2+5)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2+5)} \cdot (x^2+5)' = \frac{3 \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(x^2+5)}}{2 \cdot \cos^2(x^2+5)} \cdot 2x = \frac{3x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}(x^2+5)}}{\cos^2(x^2+5)} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Ya que, en los puntos indicados, se cumplen las condiciones de la regla de la cadena.

<sup>2</sup> Como  $\cos'(x)=-\operatorname{sen} x$ , entonces  $\cos'(f)=-\operatorname{sen} f$ .

<sup>3</sup> Como  $\operatorname{tg}'(x)=1+\operatorname{tg}^2 x=1/\cos^2 x$ , entonces  $\operatorname{tg}'(f)=1+\operatorname{tg}^2 f=1/\cos^2 f$ .

#### 4.- Problemas

1) Calcula la derivada de las funciones  $\sec x$ ,  $\operatorname{cosec} x$  y  $\operatorname{ctg} x$ .

2) Halla la derivada de las funciones  $\sec f$ ,  $\operatorname{cosec} f$  y  $\operatorname{ctg} f$ .

4) Estudia la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

5) Deriva las siguientes funciones:

a)  $y = 4\sqrt{x} \operatorname{sen}^2 x + e^x \operatorname{sen} x$

b)  $y = (x + \operatorname{sen}^5 x)^6$

c)  $y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{cos} x}$

d)  $y = \frac{e^x \cdot \operatorname{tg} x}{x^3}$

e)  $y = 2^x \cdot \ln x \cdot \operatorname{tg} x$

f)  $y = \ln \operatorname{tg} x$

g)  $y = \ln \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{cos}^2 x$

h)  $y = \ln \frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$

i)  $y = \frac{-\operatorname{cos} x}{3 \cdot \operatorname{sen}^3 x} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} x$

j)  $y = \frac{-1}{6(1 - 3 \cdot \operatorname{cos} x)^2}$

k)  $y = \frac{e^{\operatorname{tg} x} + 1}{\operatorname{cos}^2 x}$

l)  $y = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{ctg} x$

6) Deriva las siguientes funciones:

a)  $y = \operatorname{sen}^3(3x^2 + 5x - 8)$

b)  $y = \operatorname{cos}^3(x^2 + 6)$

c)  $y = \ln(\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x^2)$

d)  $y = \operatorname{cos}(3 \operatorname{sen}^2 x + 2)$

e)  $y = \frac{1}{2} \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen}^2 x}$

f)  $y = \operatorname{tg}^3(x^3 + 8x + 2)$

g)  $y = \ln \operatorname{cos} \frac{x-1}{x}$

h)  $y = \ln \operatorname{cosec} \ln x$

i)  $y = \sec^2 x^2$

j)  $y = \operatorname{cos} x + \operatorname{cos} \operatorname{cos} x$

k)  $y = \operatorname{ctg}(x^2 + 5x + 1)$

l)  $y = x \cdot \operatorname{sen}(\ln x - \frac{\pi}{4})$

m)  $y = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x^2$

n)  $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$

ñ)  $y = \operatorname{tg} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

o)  $y = \operatorname{sen} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

p)  $y = \operatorname{sen} \operatorname{tg} \sqrt{x}$

q)  $y = \operatorname{sen} \operatorname{sen} \operatorname{sen} x$

r)  $y = \operatorname{sen}(x + e^x)$

s)  $y = \frac{1 + \operatorname{cos}(2x)}{1 - \operatorname{cos}(2x)}$

t)  $y = \operatorname{sen}^2 \ln(3x^2 + 6)$

u)  $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$

v)  $y = \ln \operatorname{tg}(x + e^x)$

w)  $y = \ln \operatorname{cos} \frac{x}{2}$

x)  $y = \ln \frac{1 + \operatorname{tg}(x/2)}{1 - \operatorname{tg}(x/2)}$

y)  $y = \log_{e^x} \operatorname{sen}^2 x$

z)  $y = \log_{\operatorname{sen} x} \frac{x^2}{x^2 + 1}$

7) Deriva las siguientes funciones:

a)  $y = 4^{\operatorname{sen} x} - 2 \cdot e^{\operatorname{tg} x}$

b)  $y = 2^{\operatorname{sen} \sqrt{x}}$

c)  $y = e^{\operatorname{sen}^2 x}$

d)  $y = (\operatorname{sen} x)^x$

e)  $y = x^{\operatorname{sen} x}$

f)  $y = (\sec x)^{\sec x}$

g)  $y = x^{\operatorname{tg} x}$

h)  $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cos} x}$

i)  $y = (x^2 - 1)^{\operatorname{sen} x}$

8) Estudia la continuidad y derivabilidad en  $x=0$  de la función:

a)  $f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

9) Halla la tangente y la normal en el punto  $(0,1)$  a la gráfica de la función  $y = \operatorname{sen}^3(x + \pi/2)$ .

10) Halla el dominio de derivabilidad de la función  $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{sen} x$ .