

1) (1,5p) Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$$

2) (1p) Averigua el valor del parámetro k para que la función sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{\ln(1+x)} & \text{si } -1 < x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3) (1,5p) Deriva y simplifica la función:

$$y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

4) (1,5p) Halla la simétrica de la recta $r \equiv x=y=z$ respecto del plano $\pi \equiv x-2y+z-6=0$.

5) (1,5p) Calcula la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π :

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases} \quad \pi \equiv 3x - 2y + z - 5 = 0$$

6) (1p) Calcula:

$$\int_2^4 \ln x \cdot dx$$

7) (1p) Determina el punto de la recta $x+2y+5=0$ cuya distancia al punto P(3,1) es mínima.

8) (1p) Discute el sistema:

$$\begin{cases} x-3z=-3 \\ 2x+ky-3z=-2 \\ x+kz=1 \end{cases}$$

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2} &\stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1-1)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2-4)(\sqrt{x-1}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{2+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

¹ Multiplicamos numerador y denominador por las expresiones conjugadas de numerador y denominador.

Ejercicio 2: Averigua el valor del parámetro k para que la función sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2x)}{\ln(1+x)} & \text{si } -1 < x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (1 \text{ PUNTO})$$

* * *

Solución:

Para que la función sea continua en su dominio, debe serlo en $x=0$:

- $f(0) = k$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(2x)}{\ln(1+x)} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2 = 2$

Por tanto, $k=2$.

¹ Ya que $\text{sen}f \sim f$ y $\ln(1+f) \sim f$ si f es un infinitésimo. También puede hacerse por L'Hôpital, en cuyo caso, para obtener la indeterminación $0/0$, tenemos que aplicar la regla del límite de la composición.

Ejercicio 3: Deriva y simplifica la función:

$$y = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$y = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}} \stackrel{1}{=} \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \stackrel{2}{=} \frac{1}{2} \cdot [\ln(1 + \operatorname{sen} x) - \ln(1 - \operatorname{sen} x)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} - \frac{-\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x \cdot (1 - \operatorname{sen} x) + \cos x \cdot (1 + \operatorname{sen} x)}{(1 + \operatorname{sen} x) \cdot (1 - \operatorname{sen} x)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x \cdot (1 - \operatorname{sen} x + 1 + \operatorname{sen} x)}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

¹ Por las propiedades de los logaritmos. También puede calcularse la derivada directamente.

² Por las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 4: Halla la simétrica de la recta $r \equiv x=y=z$ respecto del plano $\pi \equiv x-2y+z-6=0$.

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de la recta r :

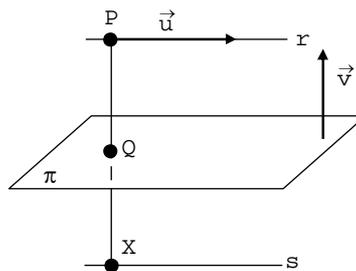
$$x=y=z \Rightarrow \begin{cases} P(0,0,0) \\ \vec{u}=(1,1,1) \end{cases}$$

Calculamos las ecuaciones paramétricas del plano π :

$$x-2y+z-6=0 \Rightarrow x=6+2y-z \Rightarrow \begin{cases} x=6+2\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

La recta y el plano son paralelos, ya que el producto escalar del vector direccional de la recta y el vector característico del plano, $\vec{v}(1,-2,1)$, es cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1,1,1) \cdot (1,-2,1) = 1-2+1=0$.

Sea Q la proyección de P sobre el plano π , X su simétrico y s la recta simétrica de r respecto de π :



Como $Q \in \pi$, $Q(6+2\alpha-\beta, \alpha, \beta)$. Ahora bien, como los vectores $\vec{v}(1,-2,1)$ y $[\vec{PQ}] = (6+2\alpha-\beta, \alpha, \beta)$ son colineales:¹

$$\frac{6+2\alpha-\beta}{1} = \frac{\alpha}{-2} = \frac{\beta}{1} \Rightarrow \begin{cases} 6+2\alpha-\beta=\beta \\ \alpha=-2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha-2\beta=-6 \\ \alpha+2\beta=0 \end{cases} \xrightarrow{2} \begin{cases} 3\alpha=-6 \\ \alpha+2\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2+2\beta=0 \Rightarrow 2\beta=2 \Rightarrow \beta=1 \Rightarrow Q(1,-2,1) \xrightarrow{3} X(2,-4,2)$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta simétrica es:

$$s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{1}$$

¹ El punto Q puede calcularse también como la intersección del plano π y la recta PQ (que pasa por P y tiene por vector direccional el vector característico del plano). O también teniendo en cuenta que el vector $[\vec{PQ}]$ es la proyección de $[\vec{PR}]$ sobre \vec{v} , donde R es un punto cualquiera del plano π , por ejemplo $R(6,0,0)$.

² A la primera ecuación le sumamos la segunda.

³ Ya que Q es el punto medio del segmento PX .

Ejercicio 5: Calcula la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π :

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases} \quad \pi \equiv 3x - 2y + z - 5 = 0 \quad (1,5 \text{ PUNTOS})$$

* * *

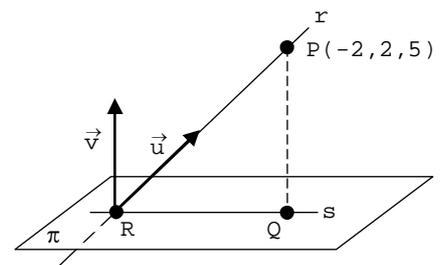
Solución:

La recta r pasa por el punto $P(-2, 2, 5)$ y tiene a $\vec{u}(1, -3, 1)$ como vector direccional.

Sea R el punto de corte de la recta r y el plano π .¹ Sean Q y s , respectivamente, las proyecciones de P y r sobre dicho plano.

Calculamos primero el punto R :²

$$\begin{aligned} 3(-2 + \lambda) - 2(2 - 3\lambda) + 5 + \lambda - 5 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -6 + 3\lambda - 4 + 6\lambda + 5 + \lambda - 5 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 10\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow R(-1, -1, 6) \end{aligned}$$



El vector característico del plano π es perpendicular a la recta s . También lo es el producto vectorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$$

Por tanto, un vector direccional de la recta s es:³

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -16\vec{i} - 22\vec{j} + 4\vec{k} = -2(8\vec{i} + 11\vec{j} - 2\vec{k})$$

Como la recta s pasa por el punto $R(-1, -1, 6)$, su ecuación continua es la siguiente:

$$\frac{x+1}{8} = \frac{y+1}{11} = \frac{z-6}{-2}$$

* * *

También puede calcularse la recta s como intersección del plano π y el perpendicular a él que contiene la recta r . Éste queda determinado por el punto P y los vectores $\vec{u}(1, -3, 1)$ y $\vec{v}(3, -2, 1)$.

¹ El producto escalar del vector direccional de la recta y el vector característico del plano, $\vec{v}(3, -2, 1)$, es distinto de cero. Por tanto, son secantes.

² Como $R \in r$, $R(-2 + \lambda, 2 - 3\lambda, 5 + \lambda)$; y como pertenece también al plano π , satisface su ecuación.

³ Este vector también puede calcularse hallando el punto Q como intersección del plano π con la recta PQ (determinada por el punto P y el vector característico de dicho plano). O teniendo en cuenta que el $[\vec{PQ}]$ es colineal con \vec{v} o que $[\vec{PQ}]$ es la proyección de $[\vec{PR}]$ sobre \vec{v} .

Ejercicio 6: Calcula:

$$\int_2^4 \ln x \cdot dx$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

$$\int_2^4 \ln x \cdot dx \stackrel{1}{=} [x \cdot \ln x - x]_2^4 = (4 \cdot \ln 4 - 4) - (2 \cdot \ln 2 - 2) \stackrel{2}{=} 2$$

$$= 8 \cdot \ln 2 - 4 - 2 \cdot \ln 2 + 2 = 6 \cdot \ln 2 - 2$$

* * *

$$\int \ln x \cdot dx \stackrel{3}{=} x \cdot \ln x - \int 1 \cdot dx \stackrel{4}{=} x \cdot \ln x - x + C$$

S	D	I
+	$\ln x$	1
-	$1/x$	x

Comprobación:

$$[x \cdot \ln x - x]' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

¹ La correspondiente integral indefinida la hacemos aparte.

² Por las propiedades de los logaritmos.

³ Esta integral se hace por partes. La integral efectuada en la columna I es inmediata de tipo potencial.

⁴ Esta integral es inmediata de tipo potencial.

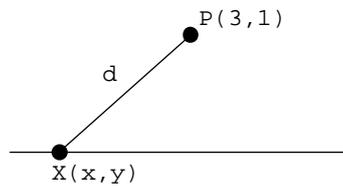
Ejercicio 7: Determina el punto de la recta $x+2y+5=0$ cuya distancia al punto $P(3,1)$ es mínima.

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Sea X un punto cualquiera de la recta dada:



La distancia del punto P al punto X tiene que ser mínima:

$$d=d(P,X) = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$$

Tenemos que expresar la distancia en función de una sola variable. Ahora bien, como X pertenece a la recta dada, satisface su ecuación. Por tanto:

$$x+2y+5=0 \Rightarrow x=-5-2y \Rightarrow d=\sqrt{(-5-2y-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(-8-2y)^2+(y-1)^2}$$

Como $d>0$, podemos sustituir esta función por su cuadrado:

$$C=(-8-2y)^2+(y-1)^2=64+32y+4y^2+y^2-2y+1=5y^2+30y+65$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$C'=10y+30=0 \Rightarrow 10y=-30 \Rightarrow y=-3$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,¹ derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $y=-3$:

$$C''=10 \Rightarrow C''(-3)=10>0 \Rightarrow d \text{ es mínima en } y=-3$$

Por último:

$$y=-3 \Rightarrow x=-5+6=1 \Rightarrow X(1,-3)$$

¹ También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

Ejercicio 8: Discute el sistema:

$$\begin{cases} x-3z=-3 \\ 2x+ky-3z=-2 \\ x+kz=1 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -3 & -2 \\ 1 & 0 & k & 1 \end{array} \right) \stackrel{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 3 & 4 \\ 0 & 0 & k+3 & 4 \end{array} \right) \stackrel{2}{\rightarrow} \begin{cases} k=0 \\ k+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=-3 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $k=-3$, el sistema es incompatible:³

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

2º) Si $k=0$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:⁴

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array} \right) \stackrel{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x-3z=-3 \\ 3z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=4/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \\ z=4/3 \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x-3z=-3 \\ ky+3z=4 \\ (k+3)z=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z=\frac{4}{k+3}} \Rightarrow ky=4-3z=4-\frac{12}{k+3}=\frac{4k-12-12}{k+3}=\Rightarrow \boxed{y=\frac{4}{k+3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-3+3z=-3+\frac{12}{k+3}=\frac{-3k-9+12}{k+3}=\frac{-3k+3}{k+3} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3(1-k)}{k+3}}$$

¹ $2^{\text{af}}-2 \cdot 1^{\text{af}}$; $3^{\text{af}}-1^{\text{af}}$.

² Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

³ Ya que la última ecuación es incompatible.

⁴ Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es 1.

⁵ $3^{\text{af}}-2^{\text{af}}$.