1) (1p) Calcula:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$$

2) (1p) Halla a y b para que sea continua la función:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x<1 \\ 5x-3 & \text{si } 1\le x<2 \\ x+a+2b & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

3) (1p) Deriva y simplifica la función:

$$f(x)=\sqrt{x^3e^x}$$

4) (1,5p) Halla el área limitada por las gráficas de las funciones $y=2-x$ e $y=x^2$, para $x>0$.

5) (1p) Calcula los valores del parámetro a para que el sistema siguiente sea de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=1 \\ 2x-y+az=2 \\ x+y+az=3 \end{array}\right\}$$

6) (2p) Dadas las matrices A y B:

a) Halla x para que A tenga inversa.

b) Si x=2, halla Y, matriz cuadrada de orden 3, que es la solución de la ecuación $A\cdot Y+B=Y$.

$$A=\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7) (1,5p) Estudia, según los valores de m, la posición relativa de los planos: $mx-y-z=m$, $x-my+mz=-m$, $x+y+z=1$.

8) (1p) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto A(1,1,1) y es paralela a los planos:

$$\pi\equiv 3x+2y-z-1=0 \qquad \pi'\equiv\begin{cases} x=2+\lambda-\mu \\ y=1-\lambda+\mu \\ z=2+\lambda+2\mu \end{cases}$$

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right) \qquad \text{(1 PUNTO)}$$

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right) \overset{1}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-x^2+2x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-2x}} \overset{2}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}$$

1 Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.

2 Simplificamos el numerador y sacamos x factor común en el denominador.

Ejercicio 2: *Halla a y b para que sea continua la función:*

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & si\ x<1 \\ 5x-3 & si\ 1\leq x<2 \\ x+a+2b & si\ x\geq 2 \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Para que la función sea continua en su dominio, debe serlo en $x=1$ y $x=2$.

Si lo es en $x=1$, entonces $a+b+1=2$:

- $f(1)=5-3=2$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(ax^2+bx+1)=a+b+1$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(5x-3)=5-3=2$

Si lo es en $x=2$, entonces $2+a+2b=7$:

- $f(2)=2+a+2b$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(5x-3)=10-3=7$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x+a+2b)=2+a+2b$

Por tanto:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+2b=5 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} a+b=1 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases}$$

[1] A la segunda ecuación le restamos la primera.

Ejercicio 3: *Deriva y simplifica la función:*

$$f(x)=\sqrt{x^3e^x}$$ *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

$$f'(x)\overset{1}{=}\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3e^x}}\cdot(x^3e^x)'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3e^x}}\cdot(3x^2e^x+x^3e^x)=\frac{x^2e^x\cdot(3+x)}{2\cdot\sqrt{x^3e^x}}=$$

$$=\frac{x^2e^x\cdot(3+x)\cdot\sqrt{x^3e^x}}{2x^3e^x}=\frac{(3+x)\cdot\sqrt{x^3e^x}}{2x}\overset{2}{=}\frac{3+x}{2}\cdot\sqrt{\frac{x^3e^x}{x^2}}=\frac{(3+x)\cdot\sqrt{xe^x}}{2}$$

Aunque el cálculo realizado para obtener la derivada carece de sentido para $x=0$, el resultado final es aplicable también para dicho punto. En efecto, como la función f es continua en $x=0$:[3]

$$f'(0)\overset{4}{=}f'_+(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f'(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{(3+x)\cdot\sqrt{xe^x}}{2}=0$$

Por tanto, $f'(x)=\frac{(3+x)\cdot\sqrt{xe^x}}{2}$ y $Dom(f')=Dom(f)=[0,+\infty)$.

[1] También puede hacerse por el método de derivación logarítmica.
[2] Como $Dom(f)=[0,+\infty)$, $x>0$.
[3] Es fácil demostrarlo.
[4] Ya que $Dom(f)=[0,+\infty)$.

Ejercicio 4: *Halla el área limitada por las gráficas de las funciones $y=2-x$ e $y=x^2$, para $x>0$.* (1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=2-x \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow 2-x=x^2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} x=1$$

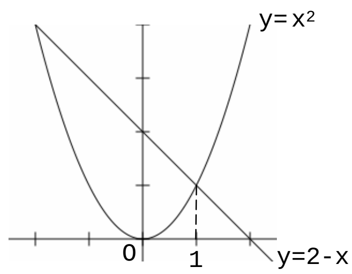
2º) Averiguamos entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
1/2	3/2	1/4

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_0^1 (2-x-x^2)\cdot dx \overset{2}{=} \left[2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{12-3-2}{6}=\frac{7}{6}$$

Representación gráfica:



1 Ya que x>0.

2 Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.

Ejercicio 5: *Calcula los valores del parámetro a para que el sistema siguiente sea de Cramer:*

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=1 \\ 2x-y+az=2 \\ x+y+az=3 \end{array}\right\}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

El sistema es de Cramer para todos los valores del parámetro, excepto -3 y 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a+2+a^2+1-a-2a^2=-a^2-2a+3=0 \Rightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{-2}=\frac{2\pm 4}{-2} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ a=1 \end{cases}$$

Ejercicio 6: *Dadas las matrices A y B:* ***a)*** *halla x para que A tenga inversa;* ***b)*** *si x=2, halla Y, matriz cuadrada de orden 3, que es la solución de la ecuación A·Y+B=Y.*

$$A=\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) A es inversible para todos los valores de x, excepto 0 y 2:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x(x-2)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

b) Evidentemente:

$$A\cdot Y+B=Y \Rightarrow B=Y-A\cdot Y \Rightarrow (I-A)\cdot Y=B$$

Ahora bien, si x=2:

$$I-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos por Gauss la ecuación matricial (I-A)·Y=B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow Y=\begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A\cdot Y+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}=Y$$

* * *

También puede hacerse calculando la inversa de I-A por el método de Gauss o por determinantes y despejando Y:

$$(I-A)\cdot Y=B \Rightarrow Y=(I-A)^{-1}\cdot B$$

[1] 1ªf-2·3ªf.

[2] 3ªf·(-1).

Ejercicio 7: Estudia, según los valores de m, la posición relativa de los planos: mx-y-z=m, x-my+mz=-m, x+y+z=1. *(1,5 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & -1 & m \\ 1 & -m & m & -m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -m & m & -m \\ m & -1 & -1 & m \end{array}\right) \overset{2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -m-1 & m-1 & -m-1 \\ 0 & -1-m & -1-m & 0 \end{array}\right) \overset{3}{\approx}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-m-1} & m-1 & -m-1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2m} & m+1 \end{array}\right) \to \begin{cases} -m-1=0 \\ -2m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=0 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si m=-1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro. Por tanto, los planos se cortan en una recta (forman parte del haz de planos de arista la recta r):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{4}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x+y+z=1 \\ -2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases}$$

2º) Si m=0, el sistema es incompatible. Ahora bien, como el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, dos de los planos se cortan en una recta y el tercero es paralela a ella:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado. Por tanto, los planos se cortan en un punto.

1 1ªf↔3ªf.
2 2ªf-1ªf; 3ªf-m·1ªf.
3 3ªf-2ªf.
4 3ªf+2ªf.

Ejercicio 8: *Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto A(1,1,1) y es paralela a los planos:*

$$\pi \equiv 3x+2y-z-1=0 \qquad \pi' \equiv \begin{cases} x=2+\lambda-\mu \\ y=1-\lambda+\mu \\ z=2+\lambda+2\mu \end{cases}$$

(1 PUNTO)

* * *

Solución:

Como $\vec{a}=(1,-1,1)$ y $\vec{b}=(-1,1,2)$ son vectores paralelos al plano π', un vector característico de dicho plano es:

$$\vec{u}=\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-3\vec{i}-3\vec{j}$$

Por otro lado, $\vec{v}=(3,2,-1)$ es un vector característico del plano π.

Como la recta que andamos buscando es paralela a ambos planos, los vectores característicos de éstos son perpendiculares a dicha recta. Por tanto, un vector direccional de ésta es el producto vectorial de dichos vectores:

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=3\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}=3(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$$

Y como la recta pasa por el punto A(1,1,1), su ecuación continua es:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

* * *

También puede obtenerse la recta como intersección de los planos paralelos a los dados que pasan por P. O calculando la intersección de los planos dados, ya que así obtenemos una recta paralela a la que buscamos y, por tanto, un vector direccional de ésta.