Septiembre de 2003.[1]

1) Estudia las discontinuidades y halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{1}{1-e^x}$$

2) Utilizando la definición, calcula las derivadas laterales de la función $f(x)=\sqrt{x^2(1+x)}$ en $x=0$.

3) Deriva y simplifica la función:

$$y=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

4) Mediante el cambio de variable $e^x=t$, halla:

$$\int\frac{e^x\cdot dx}{e^{2x}-1}$$

5) Discute según sea el valor del parámetro m y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+my+m^2z=1 \\ x+my+mz=m \\ x+m^2y+m^2z=m^2 \end{array}\right\}$$

6) Dada la matriz A, demuestra que la matriz $B=A^n$, donde n es un número natural distinto de cero, tiene inversa. Calcula ésta:

$$A=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

7) Resuelve la inecuación:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & x^2 & x^3\\ x^2 & x^4 & x^6\end{vmatrix}\geq 0$$

8) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto A y corta perpendicularmente a la recta r:

$A(1,2,1)$ $\qquad$ $r\equiv\begin{cases}x-y-z=1\\ x+z=2\end{cases}$

[1] Todos los ejercicios valen lo mismo.

Ejercicio 1: *Estudia las discontinuidades y halla las ecuaciones de las asíntotas de la función:*

$$f(x)=\frac{1}{1-e^x}$$

* * *

Solución:

1º) $Dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$:

$$1-e^x\neq 0 \Rightarrow e^x\neq 1 \Rightarrow x\neq 0$$

2º) La función es continua en su dominio, ya que, si $a\in Dom(f)$:[1]

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{1-e^x}=\frac{1}{1-e^a}=f(a)$$

3º) La función presenta una discontinuidad de salto infinito en $x=0$ y, por tanto, la recta $x=0$ es asíntota vertical de la función:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{1-e^x}=\frac{1}{0^+}=+\infty;\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{1-e^x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

4º) Las rectas $y=1$ e $y=0$ son asíntotas horizontales de la función en $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{1-e^x}=\frac{1}{1-e^{-\infty}}=\frac{1}{1-0}=1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1-e^x}=\frac{1}{1-e^{+\infty}}=\frac{1}{1-\infty}=\frac{1}{-\infty}=0$$

Posiciones relativas:

$$f(x)-y=\frac{1}{1-e^x}-1=\frac{1-1+e^x}{1-e^x}=\frac{e^x}{1-e^x}$$

Por tanto, como la diferencia es positiva en $-\infty$, ya que numerador y denominador son positivos,[2] la función se encuentra situada por encima de la asíntota.

$$f(x)-y=\frac{1}{1-e^x}-0=\frac{1}{1-e^x}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $+\infty$, ya que el denominador es negativo,[3] la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

[1] Otra forma de estudiar la continuidad es derivando la función.
[2] La función exponencial e^x es mayor que 0 y menor que 1 si el exponente es negativo.
[3] La función exponencial e^x es mayor que 1 si el exponente es positivo.

Ejercicio 2: *Utilizando la definición, calcula las derivadas laterales de la función $f(x)=\sqrt{x^2(1+x)}$ en $x=0$.*

* * *

Solución:

$$f'_-(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{x^2(1+x)}-0}{x}\overset{1}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x\cdot\sqrt{1+x}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-\sqrt{1+x})=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{x^2(1+x)}-0}{x}\overset{2}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x\cdot\sqrt{1+x}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{1+x}=1$$

1 Como $x<0$, $\sqrt{x^2}=|x|=-x$.
2 Como $x>0$, $\sqrt{x^2}=|x|=x$.

Ejercicio 3: *Deriva y simplifica la función:*

$$y=arc\,tg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

* * *

Solución:

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{-2x}{2\cdot\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x^2+x^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1-x^2}{1}\cdot\frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ejercicio 4: *Mediante el cambio de variable $e^x=t$, halla:*

$$\int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x}-1}$$

* * *

Solución:

Hacemos el cambio de variable:

$$e^x=t,\ e^x \cdot dx=dt$$

$$\int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x}-1} = \int \frac{dt}{t^2-1}$$

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$t^2-1=0 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=\pm 1$$

Por tanto:[1]

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t+1)(t-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A(t+1)+B(t-1) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } t=1 \Rightarrow 1=2A \Rightarrow A=1/2 \\ \text{Si } t=-1 \Rightarrow 1=-2B \Rightarrow B=-1/2 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x}-1} = \int \frac{1}{t^2-1} \cdot dt = \int \frac{1/2}{t-1} \cdot dt + \int \frac{-1/2}{t+1} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t-1} \cdot dt - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t+1} \cdot dt \overset{2}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln|t-1| - \frac{1}{2} \cdot \ln|t+1| + C \overset{3}{=} \frac{1}{2} \cdot \ln|e^x-1| - \frac{1}{2} \cdot \ln|e^x+1| + C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \ln|e^x-1| - \frac{1}{2} \cdot \ln|e^x+1|\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x}{2(e^x-1)} - \frac{e^x}{2(e^x+1)} =$$

$$= \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{2(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{e^x(e^x+1-e^x+1)}{2(e^{2x}-1)} = \frac{2e^x}{2(e^{2x}-1)} = \frac{e^x}{e^{2x}-1}$$

[1] Aplicamos el método de descomposición en fracciones simples.
[2] Se trata de integrales casi inmediatas de tipo logaritmo. Si se desea, puede simplificarse el resultado final agrupando los sumandos mediante las propiedades de los logaritmos.
[3] Deshacemos el cambio.

Ejercicio 5: Discute según sea el valor del parámetro m y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+my+m^2z=1 \\ x+my+mz=m \\ x+m^2y+m^2z=m^2 \end{array}\right\}$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m^2 & 1 \\ 1 & m & m & m \\ 1 & m^2 & m^2 & m^2 \end{array}\right) \overset{1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & m^2 & 1 \\ 0 & 0 & m-m^2 & m-1 \\ 0 & m^2-m & 0 & m^2-1 \end{array}\right) \overset{2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & m & m^2 & 1 \\ 0 & \mathbf{m^2-m} & 0 & m^2-1 \\ 0 & 0 & \mathbf{m-m^2} & m-1 \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} m(m-1)=0 \\ m(1-m)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si m=0, el sistema es incompatible:[4]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

2º) Si m=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+my+m^2z=1 \\ (m^2-m)y=m^2-1 \\ (m-m^2)z=m-1 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{m-1}{m(1-m)} \Rightarrow \boxed{z=-\frac{1}{m}} \Rightarrow (m^2-m)y=m^2-1 \Rightarrow y=\frac{(m+1)(m-1)}{m(m-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{m+1}{m}} \Rightarrow x=1-my-m^2z=1-m-1+m \Rightarrow \boxed{x=0}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.

2 2ªf↔3ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

4 Ya que contiene ecuaciones incompatibles.

Ejercicio 6: *Dada la matriz A, demuestra que la matriz $B=A^n$, donde n es un número natural distinto de cero, tiene inversa. Calcula ésta:*

$$A=\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}$$

* * *

Solución:

1º) Calculamos $B=A^n$:

$$A^1=\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2x\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2x\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3x\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3x\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4x\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$B=A^n=\begin{pmatrix}1 & nx\\0 & 1\end{pmatrix}$$

2º) Como $|B|\neq 0$, B tiene inversa:

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & nx\\0 & 1\end{vmatrix}=1$$

Hallamos la inversa de B por el método de Gauss:[1]

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & nx & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{2}{\approx}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -nx\\0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -nx\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}1 & nx\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -nx\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & -nx+nx\\0+0 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

1 También puede hacerse mediante determinantes.
2 1ªf-nx·2ªf.

Ejercicio 7: *Resuelve la inecuación:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^4 & x^6 \end{vmatrix} \geq 0$$

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^4 & x^6 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & x^2-x & x^3-x^2 \\ x^2 & x^4-x^2 & x^6-x^4 \end{vmatrix} \overset{2}{=} \begin{vmatrix} x^2-x & x^3-x^2 \\ x^4-x^2 & x^6-x^4 \end{vmatrix} =$$

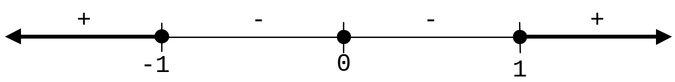
$$= \begin{vmatrix} x(x-1) & x^2(x-1) \\ x^2(x^2-1) & x^4(x^2-1) \end{vmatrix} \overset{3}{=} x(x-1)x^2(x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= x^3(x-1)^2(x+1)(x^2-x) = x^4(x-1)^3(x+1)$$

Por tanto, la inecuación que tenemos que resolver es la siguiente:

$$x^4(x-1)^3(x+1) \geq 0$$

Estudiamos el signo de la expresión:



La solución es, pues, $(-\infty,-1] \cup \{0\} \cup [1,+\infty)$.

---

[1] 3ªc-2ªc; 2ªc-1ªc.

[2] Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera fila.

[3] Extraemos fuera del determinante los factores $x(x-1)$ y $x^2(x^2-1)$ de las filas primera y segunda, respectivamente.

Ejercicio 8: *Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto A y corta perpendicularmente a la recta r:*

$$A(1,2,1) \qquad\qquad r\equiv\begin{cases} x-y-z=1 \\ x+z=2 \end{cases}$$

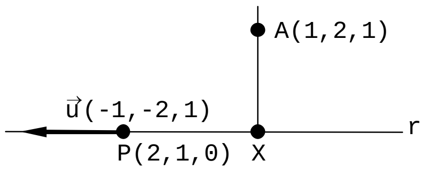
* * *

Solución:

Calculamos una determinación lineal de la recta r:

$$\begin{cases} x-y-z=1 \\ x+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1+2-z-z \\ x=2-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(2,1,0) \\ \vec{u}(-1,-2,1) \end{cases}$$

Sea AX la recta perpendicular a r trazada desde A:



Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}\wedge[\overrightarrow{PA}]$ son perpendiculares a la recta AX, un vector direccional de ésta es el producto vectorial de dichos vectores:[1]

$$\vec{u}\wedge(\vec{u}\wedge[\overrightarrow{PA}])=\vec{u}\wedge\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{u}\wedge(-3\vec{i}-3\vec{k})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix}=6\vec{i}-6\vec{j}-6\vec{k}=6(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$$

* * *

También puede calcularse la recta AX como intersección del plano determinado por el punto A y la recta r con el plano perpendicular a esta recta que pasa por A. O calculando el punto X como intersección de este último plano y la recta r; o considerando que los vectores $\vec{u}$ y $[\overrightarrow{AX}]$ son perpendiculares; o calculando el punto de la recta r más próximo a A; o aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo PAX (en este caso, al ser X=P, te saldrá una solución doble).[2]

[1] Otra forma de hallar un vector direccional consiste en calcular X(x,y,z) teniendo en cuenta que el vector $[\overrightarrow{PX}]$ es la proyección del vector $[\overrightarrow{PA}]$ sobre $\vec{u}$.

[2] Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo APX, siempre sale como una de las soluciones el punto P de la recta r, ya que, si en la fórmula del teorema, sustituyes X por P, se obtiene $PP^2+PA^2=PA^2$, esto es, $PA^2=PA^2$, lo que siempre es cierto.