1) De la siguiente función f, se pide:

a) Dominio.

b) Derivada.

c) Continuidad y discontinuidades.

$$f(x)=\ln\frac{x+2}{x^2}$$

2) De la función del problema anterior, se pide.

a) Asíntotas verticales.

b) Su comportamiento en $+\infty$.

3) Halla el punto de la curva $y=x^3-3x^2+6x-4$ en el que la recta tangente tiene pendiente mínima. Calcula la ecuación de dicha recta tangente.

4) Encuentra el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y=x^2-3x-10$ e $y=2x-4$.

5) Discute según sea el valor del parámetro k y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \\ x+y+z=k \end{array}\right\}$$

6) Dadas las matrices A y B, halla:

a) $Y=3\cdot A\cdot A'-2\cdot I$, donde A' e I son, respectivamente, la traspuesta de A y la matriz unidad de orden 2.

b) La matriz X tal que $A\cdot X=B$.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}=x^2$$

8) Si A(1,1,1), B(-1,3,1), C(1,0,0) y D(0,2,0), halla el punto P de la recta AB tal que el triángulo CPD sea rectángulo con hipotenusa PC.

[1] Todos los ejercicios valen lo mismo.

Ejercicio 1: *De la siguiente función, se pide:* **a)** *dominio;* **b)** *derivada;* **c)** *continuidad y discontinuidades.*

$$f(x)=\ln\frac{x+2}{x^2}$$

* * *

Solución:

a) $\mathrm{Dom}(f)=(-2,0)\cup(0,+\infty)$:

$$\begin{cases}(x+2)/x^2>0\\ x^2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2>0\\ x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-2\\ x\neq 0\end{cases}$$

b)

$$f(x)=\ln\frac{x+2}{x^2}\overset{1}{=}\ln(x+2)-2\cdot\ln x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+2}-2\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x}=\frac{x-2x-4}{x(x+2)}=-\frac{x+4}{x(x+2)}$$

c) La función es continua en su dominio, ya que es derivable en él. Además, en x=0 presenta una discontinuidad de salto infinito:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\ln\frac{x+2}{x^2}\overset{2}{=}\ln\frac{2}{0^+}=\ln(+\infty)=+\infty$$

[1] Aplicamos las propiedades de los logaritmos (ya se ha justificado este modo de proceder en *Derivadas*, en este mismo *blog*). También puede hallarse la derivada directamente.
[2] Aplicamos la regla del límite de la composición.

Ejercicio 2: De la función del problema anterior, se pide: a) asíntotas verticales; b) su comportamiento en $+\infty$.

* * *

Solución:

a) Las rectas x=-2 y x=0 son asíntotas verticales de la función (esta última por el cálculo hecho en el apartado c del problema anterior):

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \ln\frac{x+2}{x^2} \overset{1}{=} \ln\frac{0^+}{4} = \ln 0^+ = -\infty$$

b) La función tiene en $+\infty$ una rama parabólica en la dirección del eje OX:

- $$k=\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x+2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1+\frac{2}{x}}{x} \overset{1}{=}$$
$$= \ln\frac{1+0}{+\infty} = \ln 0^+ = -\infty$$

- $$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+2}{x^2}}{x} \overset{2}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x+2}\cdot\left(\frac{x+2}{x^2}\right)'}{1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}\cdot\frac{x^2-(x+2)\cdot 2x}{x^4}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-2x^2-4x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-4x}{x^3+2x^2} \overset{3}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

---

1 Aplicamos la regla del límite de la composición.

2 Como sale la indeterminación ∞/∞, aplicamos L'Hôpital. Para obtener dicha indeterminación hemos aplicado la regla del límite de la composición al numerador.

3 Ya que $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \sim a_nx^n$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común en numerador y denominador la respectiva máxima potencia de x, simplificando a continuación. O por L'Hôpital.

Ejercicio 3: *Halla el punto de la curva $y=x^3-3x^2+6x-4$ en el que la recta tangente tiene pendiente mínima. Calcula la ecuación de dicha recta tangente.*

* * *

Solución:

a) Como la pendiente de la recta tangente coincide con la derivada, ésta debe ser mínima:

$$m=y'=3x^2-6x+6$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$m'=6x-6=0 \Rightarrow 6x=6 \quad x=1$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[1] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en x=1:

$$m''=6 \Rightarrow m''(1)=6>0 \Rightarrow m \text{ es mínima en } x=1$$

Por último:

$$x=1 \Rightarrow y=1-3+6-4=0 \Rightarrow P(1,0)$$

b) Como, evidentemente, la pendiente de la recta tangente en el punto P(1,0) es m=3-6+6=3, su ecuación explícita es:

$$y-0=3(x-1) \Rightarrow y=3x-3$$

[1] También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.

Ejercicio 4: *Encuentra el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y=x^2-3x-10$ e $y=2x-4$.*

* * *

Solución:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^2-3x-10 \\ y=2x-4 \end{cases} \Rightarrow x^2-3x-10=2x-4 \Rightarrow x^2-5x-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm7}{2} \Rightarrow x=\begin{cases} x=-1 \\ x=6 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre -1 y 6 qué función está por encima y qué función está por debajo:

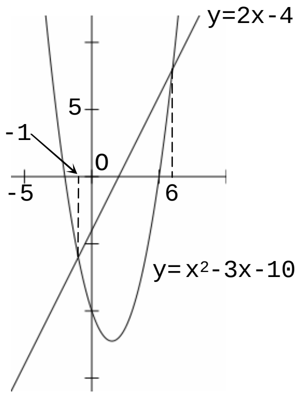
x	y_1	y_2
0	-10	-4

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-1}^{6}(2x-4-x^2+3x+10)\cdot dx=\int_{-1}^{6}(6+5x-x^2)\cdot dx \stackrel{1}{=} \left[6x+5\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{6}=$$

$$=(36+90-72)-\left(-6+\frac{5}{2}+\frac{1}{3}\right)=54+6-\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=60-\frac{17}{6}=\frac{360-17}{6}=\frac{343}{6}$$

Representación gráfica:



[1] Como el cálculo de una primitiva es trivial, lo hacemos directamente.

Ejercicio 5: *Discute según sea el valor del parámetro k y resuelve, en su caso, el sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \\ x+y+z=k \end{array}\right\}$$

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{array}\right) \underset{\sim}{1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k & 1-k^2 \end{array}\right) \underset{\sim}{3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 0 & 1-k & 2-k-k^2 \end{array}\right) \underset{\sim}{4} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & k \\ 0 & \mathbf{k-1} & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & \mathbf{k-1} & 1-k \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3-2k-k^2} \end{array}\right) \overset{5}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k-1=0 \\ k-1=0 \\ k^2+2k-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\dfrac{-2\pm 4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-3 \\ k=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si k=-3, el sistema es compatible determinado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y+z=-3 \\ -4y=4 \\ -4z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3-y-z \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

2º) Si k=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

3º) En los demás casos el sistema es incompatible.

1 1ªf↔4ªf.
2 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf; 4ªf-k·1ªf.
3 4ªf+2ªf.
4 4ªf+3ªf. Los pasos 3 y 4 se pueden hacer a la vez.
5 Si $3-2k-k^2\neq 0$, el sistema es incompatible (caso 3º). Estudiamos primero los demás casos.

Ejercicio 6: *Dadas las matrices A y B, halla:* ***a)*** *$Y=3\cdot A\cdot A'-2\cdot I$, donde A' e I son, respectivamente, la traspuesta de A y la matriz unidad de orden 2;* ***b)*** *la matriz X tal que $A\cdot X=B$.*

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

* * *

Solución:

a) Calculamos la matriz Y:

$$Y=3\cdot A\cdot A'-2\cdot I=3\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}10 & 17\\ 17 & 29\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}30 & 51\\ 51 & 87\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28 & 51\\ 51 & 85\end{pmatrix}$$

b) Aplicamos el método de Gauss para resolver la ecuación matricial $A\cdot X=B$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 2 & 0\\ 5 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 2 & 0\\ 15 & 6 & 0 & 3\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -10 & 3\end{array}\right)\overset{3}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 0 & 12 & -3\\ 0 & 1 & -10 & 3\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -10 & 3\end{array}\right)\to X=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -10 & 3\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1\\ -10 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12-10 & -3+3\\ 20-20 & -5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=B$$

* * *

También puede resolverse dicha ecuación hallando primero la inversa de A por el método de Gauss o por determinantes y despejando X:

$$A\cdot X=B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

1 2ªf·3.
2 2ªf-5·1ªf.
3 1ªf-2ªf.
4 1ªf·1/3.

Ejercicio 7: *Resuelve la ecuación:*

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2$$

* * *

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 4+x & 1 & 1 & 1 \\ 4+x & 1+x & 1 & 1 \\ 4+x & 1 & 1+x & 1 \\ 4+x & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} \overset{2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 4+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \overset{3}{=} (4+x)x^3$$

Por tanto:

$$(4+x)x^3=x^2 \Rightarrow (4+x)x^3-x^2=0 \Rightarrow x^2(4x+x^2-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x^2+4x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (solución doble)} \\ x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+4}}{2}=\dfrac{-4\pm2\sqrt{5}}{2}=-2\pm\sqrt{5} \end{cases}$$

1 1ªc+2ªc+3ªc+4ªc.
2 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf; 4ªf-1ªf.
3 El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

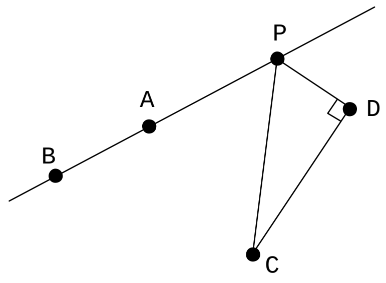
Ejercicio 8: *Si A(1,1,1), B(-1,3,1), C(1,0,0) y D(0,2,0), halla el punto P de la recta AB tal que el triángulo CPD sea rectángulo con hipotenusa PC.*

* * *

Solución:

Como la recta AB pasa por el punto A(1,1,1) y tiene por vector direccional $[\overrightarrow{AB}]=(-2,2,0)$, sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x=1-2\alpha \\ y=1+2\alpha \\ z=1 \end{cases}$$



Como el punto P pertenece a la recta AB, satisface su ecuación:

$$P(1-2\alpha,1+2\alpha,1)$$

Si el triángulo CPD es rectángulo con hipotenusa PC, los vectores $[\overrightarrow{DP}]$ y $[\overrightarrow{DC}]$ son perpendiculares:[1]

$$[\overrightarrow{DP}]\perp[\overrightarrow{DC}] \Rightarrow [\overrightarrow{DP}]\cdot[\overrightarrow{DC}]=0 \Rightarrow (1-2\alpha,-1+2\alpha,1)\cdot(1,-2,0)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2\alpha+2-4\alpha=0 \Rightarrow 6\alpha=3 \Rightarrow \alpha=1/2 \Rightarrow P(0,2,1)$$

[1] También puede calcularse el parámetro α aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo PCD.