1) (1,4p) Define asíntota oblicua de una función f en $+\infty$. Halla la ecuación de la asíntota oblicua que la función $y=\sqrt{x^2-2x}$ tiene en $+\infty$.

2) (1,2p) Calcula:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{\ln^2 x}$$

3) (1,2p) La función $y=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un punto de derivada nula en (1,1), que no es un extremo relativo. Halla razonadamente a, b y c.

4) (1,2p) Calcula:

$$\int \sqrt{\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{1-x^2}} \cdot dx$$

5) (1,2p) Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+(t+1)y+tz=t+1 \\ x+(t+1)y+z=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$$

6) (1,4p) Define matriz inversible. Calcula los valores de x para los cuales la siguiente matriz no tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$$

7) (1,2p) Un cubo tiene un vértice en el punto P(1,3,0) y una de sus caras está en el plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas r y s. Halla la ecuación de dicho plano y el área total del cubo:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{0}$$

8) (1,2p) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(2,-1,0) y es paralela a los planos $x-y+z=0$ e $y=0$.

Ejercicio 1: *Define asíntota oblicua de una función f en $+\infty$. Halla la ecuación de la asíntota oblicua que la función $y=\sqrt{x^2-2x}$ tiene en $+\infty$.* *(1,4 PUNTOS)*

* * *

Solución:

La recta y=x-1 es asíntota oblicua de f en $+\infty$:

- $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)=+\infty\cdot\sqrt{1-0}=+\infty$
- $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}}=\sqrt{1-0}=1$
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x}-x)\overset{1}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x}\overset{2}{=}$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x\cdot\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=\frac{-2}{\sqrt{1-0}+1}=\frac{-2}{2}=-1$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\sqrt{x^2-2x}-(x-1)\overset{3}{=}\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-2x+1}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $+\infty$, ya que el sustraendo es mayor que el minuendo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

[1] Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.
[2] Simplificamos el numerador y sacamos x factor común en el denominador.
[3] Ya que en $+\infty$, como $x-1>0$, $x-1=|x-1|=\sqrt{(x-1)^2}$.

Ejercicio 2: Calcula:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{\ln^2 x}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Hacemos el cambio de variable x-1=t:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{\ln^2 x}\overset{1}{=}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{[\ln(1+t)]^2}\overset{2}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t^2/2}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

[1] También puede hacerse por L'Hôpital, en cuyo caso, para obtener la indeterminación 0/0, aplicamos la regla del límite de la composición al numerador.

[2] Ya que, en $t=0$, $1-\cos t\sim t^2/2$ y $\ln(1+t)\sim t$.

Ejercicio 3: *La función $y=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un punto de derivada nula en (1,1), que no es un extremo relativo. Halla razonadamente a, b y c.* *(1,2 PUNTOS)*

* * *

Solución:

Si $y''(1)\neq 0$, entonces, como $y'(1)=0$, por el criterio de la derivada segunda la función tendría un extremo en x=1. Pero no lo tiene. Por tanto, $y''(1)=0$. Podemos recoger la información en la siguiente tabla:

x	y	y'	y"
1	1	0	0

Como $y=x^3+ax^2+bx+c$, entonces $y'=3x^2+2ax+b$ e $y''=6x+2a$.

Como el punto (1,0) pertenece a las gráficas de las funciones y" e y' y el punto (1,1) pertenece a la gráfica de la función y, tenemos lo siguiente:

$$y''(1)=0 \Rightarrow 6+2a=0 \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow a=-3$$

$$y'(1)=0 \Rightarrow 3+2a+b=0 \overset{1}{\Rightarrow} 3-6+b=0 \Rightarrow b=3$$

$$y(1)=1 \Rightarrow 1+a+b+c=1 \overset{2}{\Rightarrow} -3+3+c=0 \Rightarrow c=0$$

1 Ya que a=-3.
2 Ya que a=-3 y b=3.

Ejercicio 4: Calcula:

$$\int \sqrt{\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{1-x^2}} \cdot dx$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

$$\int \sqrt{\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{1-x^2}} \cdot dx \overset{1}{=} \int (\operatorname{arc\,sen} x)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx \overset{2}{=}$$

$$= \frac{(\operatorname{arc\,sen} x)^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{2}{3} \cdot (\operatorname{arc\,sen} x)^{3/2} + C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{2}{3} \cdot (\operatorname{arc\,sen} x)^{3/2}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (\operatorname{arc\,sen} x)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{\operatorname{arc\,sen} x}}{\sqrt{1-x^2}} \overset{1}{=} \sqrt{\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{1-x^2}}$$

[1] Este paso es correcto, ya que el dominio de la función integrando es [0,1).

[2] Se trata de una integral casi inmediata de tipo potencial. También puede hacerse con el cambio de variable $\operatorname{arc\,sen} x = t^2$, $(1/\sqrt{1-x^2}) \cdot dx = 2t \cdot dt$. O $\operatorname{arc\,sen} x = t$, $(1/\sqrt{1-x^2}) \cdot dx = dt$. O incluso por partes.

Ejercicio 5: *Discute y resuelve, en su caso, el sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} x+(t+1)y+tz=t+1 \\ x+(t+1)y+z=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t+1 & t & t+1 \\ 1 & t+1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t+1 & t & t+1 \\ 0 & 0 & 1-t & -t-1 \\ 0 & -t & -t & -t \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & t+1 & t & t+1 \\ 0 & \mathbf{-t} & -t & -t \\ 0 & 0 & \mathbf{1-t} & -t-1 \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -t=0 \\ 1-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si t=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1 \end{cases}$$

2º) Si t=1, el sistema es incompatible:[5]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

3º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+(t+1)y+tz=t+1 \\ -ty-tz=-t \\ (1-t)z=-t-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=\frac{t+1}{t-1}} \Rightarrow ty=t-tz \overset{6}{\Rightarrow} y=1-\frac{t+1}{t-1}=\frac{t-1-t-1}{t-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{-2}{t-1}} \Rightarrow x=t+1-(t+1)y-tz=t+1-(t+1)\cdot\frac{-2}{t-1}-t\cdot\frac{t+1}{t-1}=$$

$$=\frac{t^2-1+2t+2-t^2-t}{t-1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{t+1}{t-1}}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.

2 2ªf↔3ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 3º).

4 Suprimimos la segunda ecuación por trivial.

5 Ya que la tercera ecuación es incompatible.

6 Dividimos por t y sustituimos z por su valor.

Ejercicio 6: *Define matriz inversible. Calcula los valores de x para los cuales la siguiente matriz no tiene inversa:*

$$\begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$$

(1,4 PUNTOS)

* * *

Solución:

Una matriz no tiene inversa si su determinante es cero. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2\cdot|x|-|x-2|=0 \Rightarrow 2\cdot|x|=|x-2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2x|=|x-2| \Rightarrow \begin{cases} 2x=x-2 \\ 2x=-x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ 3x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2/3 \end{cases}$$

Ejercicio 7: *Un cubo tiene un vértice en el punto P(1,3,0) y una de sus caras está en el plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas r y s. Halla la ecuación de dicho plano y el área total del cubo:*

$$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1} \qquad s \equiv \frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{0}$$

(1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

a) Evidentemente, las rectas no son paralelas:

$$\frac{2}{-1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{1}{0}$$

Por tanto, el plano π que andamos buscando queda determinado por el punto O(0,0,0), ya que pasa por el origen de coordenadas, y los vectores $\vec{u}=(2,1,1)$ y $\vec{v}=(-1,2,0)$, ya que es paralelo a las rectas r y s:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -2x-y+5z=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y-5z=0$$

b) Como el punto P(1,3,0) no pertenece al plano π, pues no satisface su ecuación, la longitud del lado del cubo es precisamente la distancia de P a π. Por tanto:

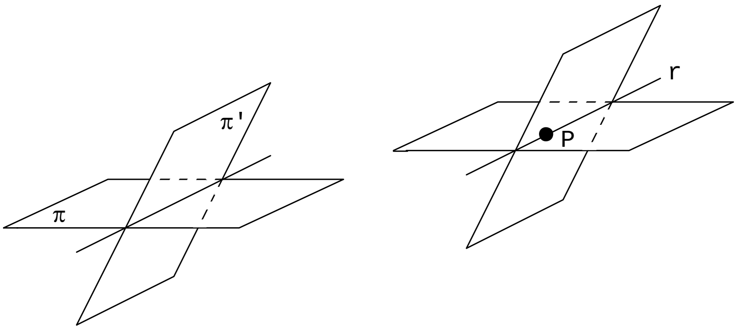
$$d(P,\pi)=\frac{|2+3-0|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{5}{\sqrt{30}} \Rightarrow A=6\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right)^2=6\cdot\frac{25}{30}=5$$

Ejercicio 8: *Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(2,-1,0) y es paralela a los planos x-y+z=0 e y=0.* (1,2 PUNTOS)

* * *

Solución:

Como la recta r que andamos buscando pasa por el punto P(2,-1,0) y es paralela a los planos $\pi \equiv x-y+z=0$ y $\pi' \equiv y=0$, se encontrará situada en los planos paralelos a ellos que pasan por P:



Por tanto:

$$\begin{cases} x-y+z+D=0 \\ y+D'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+1+0+D=0 \\ -1+D'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=-3 \\ D'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z-3=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3+y-z \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\alpha \\ y=-1 \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}$$

* * *

También puede obtenerse la recta calculando directamente un vector direccional. Éste se obtiene multiplicando vectorialmente los vectores característicos de los planos dados, ya que ambos vectores son perpendiculares a la recta buscada. O calculando la intersección de dichos planos, con lo que se obtiene una recta paralela a r y, por tanto, un vector direccional de ésta.