

1) (1,5p) Define función continua en un punto. Estudia la continuidad de la siguiente función en  $x=1$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{e}}{2-x} & \text{si } x \leq 1 \\ \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2) (1p) Calcula la recta tangente a la curva  $y=x^{\operatorname{sen} x}$  en el punto de abscisa  $\pi/2$ .

3) (1p) Halla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2 - \operatorname{arctg} x^2}$$

4) (1,5p) Define primitiva de una función. Calcula una primitiva de la función  $y=\sqrt{x} \cdot (x-1)$  y comprueba el resultado.

5) (1,2p) Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+az=1 \\ x+y=a+1 \\ x+y+az=a^2-a+1 \end{array} \right\}$$

6) (1,5p) Define matriz inversible. Calcula los valores del parámetro  $m$  para los que la matriz  $A$  no tiene inversa. Halla su inversa para el valor del parámetro que quieras y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} m^2 & m-1 \\ m+2 & m-1 \end{pmatrix}$$

7) (1p) Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

8) (1,3p) Halla el valor del parámetro  $k$  para que la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$  sea de 2 unidades:

$$r \equiv \begin{cases} x-2z=3 \\ y-2=0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-k}{-1}$$

**Ejercicio 1:** Define función continua en un punto. Estudia la continuidad de la siguiente función en  $x=1$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{e}}{2-x} & \text{si } x \leq 1 \\ \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (1,5 \text{ PUNTOS})$$

\* \* \*

**Solución:**

La función es continua en  $x=1$ :

- $f(1) = \sqrt{e}$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e}}{2-x} = \sqrt{e}$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-1}} \stackrel{1}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{2}{x^2-1} \cdot \left(\frac{x+1}{2} - 1\right) \right]} =$   
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{2}{x^2-1} \cdot \frac{x+1-2}{2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+1}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$

---

<sup>1</sup> Ya que sale la expresión indeterminada  $1^\infty$ .

**Ejercicio 2:** Calcula la recta tangente a la curva  $y=x^{\operatorname{sen}x}$  en el punto de abscisa  $\pi/2$ .

(1 PUNTO)

\* \* \*

**Solución:**

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y(\pi/2) = (\pi/2)^{\operatorname{sen}(\pi/2)} = (\pi/2)^1 = \pi/2$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:

$$\begin{aligned} y = x^{\operatorname{sen}x} &\stackrel{1}{=} e^{\operatorname{sen}x \cdot \ln x} \Rightarrow y' = e^{\operatorname{sen}x \cdot \ln x} \cdot (\operatorname{sen}x \cdot \ln x)' = \\ &= x^{\operatorname{sen}x} \cdot \left( \cos x \cdot \ln x + \operatorname{sen}x \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{x \cdot \cos x \cdot \ln x + \operatorname{sen}x}{x} \cdot x^{\operatorname{sen}x} \end{aligned}$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(\pi/2) = \frac{0+1}{\pi/2} \cdot (\pi/2) = 1$$

Resumiendo:

x	y	y'
$\pi/2$	$\pi/2$	1

4º) Por tanto, la ecuación explícita de la recta tangente es:

$$y - \pi/2 = 1 \cdot (x - \pi/2) \Rightarrow y - \pi/2 = x - \pi/2 \Rightarrow y = x$$

<sup>1</sup> Aunque se puede derivar la función por el método de derivación logarítmica, también podemos hacerlo escribiéndola como función exponencial de base e.

Ejercicio 3: Halla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x^2}{x^2 - \operatorname{arc\,tg} x^2}$$

(1 PUNTO)

\* \* \*

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x^2}{x^2 - \operatorname{arc\,tg} x^2} &\stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^4} \cdot 2x}{2x - \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x} \stackrel{2}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x(1+x^4) - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x(1+x^4-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Como sale la expresión indeterminada 0/0, aplicamos L'Hôpital. Para obtener esta indeterminación hemos aplicado en el numerador y en el denominador la regla del límite de la composición.

<sup>2</sup> Multiplicamos numerador y denominador por  $1+x^4$ .

**Ejercicio 4:** Define primitiva de una función. Calcula una primitiva de la función  $y = \sqrt{x} \cdot (x-1)$  y comprueba el resultado. (1,5 PUNTOS)

\* \* \*

**Solución:**

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \cdot (x-1) \cdot dx &= \int x^{1/2} \cdot (x-1) \cdot dx = \int (x^{3/2} - x^{1/2}) \cdot dx \stackrel{1}{=} \\ &= \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} - \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{2}{5} \cdot x^{5/2} - \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + C \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\left( \frac{2}{5} \cdot x^{5/2} - \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \right)' = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot x^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} = x^{3/2} - x^{1/2} = x^{1/2} \cdot (x-1) = \sqrt{x} \cdot (x-1)$$

---

<sup>1</sup> Se trata de dos integrales inmediatas de tipo potencial.

**Ejercicio 5:** Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+y=a+1 \\ x+y+az=a^2-a+1 \end{cases} \quad (1,2 \text{ PUNTOS})$$

\* \* \*

**Solución:**

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 & a+1 \\ 1 & 1 & a & a^2-a+1 \end{array} \right) \xrightarrow{1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -a & a \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a \end{array} \right) \xrightarrow{2} \begin{cases} -a=0 \\ a(a-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

**1º)** Si  $a=0$ , el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:<sup>3</sup>

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow x+y=1 \Rightarrow x=1-y \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

**2º)** Si  $a=1$ , el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y-z \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1 \end{cases}$$

**3º)** En los demás casos el sistema es incompatible.

<sup>1</sup>  $2^{\text{af}}-1^{\text{af}}$ ;  $3^{\text{af}}-1^{\text{af}}$ .

<sup>2</sup> Si  $a^2-a \neq 0$ , el sistema es incompatible (caso 3º). Estudiamos primero los demás casos.

<sup>3</sup> Ya que el número de incógnitas menos el número de ecuaciones fundamentales es dos.

**Ejercicio 6:** Define matriz inversible. Calcula los valores del parámetro  $m$  para los que la matriz  $A$  no tiene inversa. Halla su inversa para el valor del parámetro que quieras y comprueba el resultado:

$$A = \begin{pmatrix} m^2 & m-1 \\ m+2 & m-1 \end{pmatrix} \quad (1,5 \text{ PUNTOS})$$

\* \* \*

**Solución:**

**a)** La matriz  $A$  no tiene inversa para  $m=-1$ ,  $m=1$  y  $m=2$ :

$$\begin{aligned} |A|=0 &\Rightarrow \begin{vmatrix} m^2 & m-1 \\ m+2 & m-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2 \cdot (m-1) - (m-1)(m+2) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (m-1) \cdot (m^2 - m - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ m^2 - m - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases} \end{aligned}$$

**b)** Calculamos la inversa de  $A$  para  $m=0$ :

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} (A^*)' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)'}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ -1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\* \* \*

También puede calcularse la inversa por Gauss:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) &\stackrel{3}{\sim} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \stackrel{4}{\sim} \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \stackrel{5}{\sim} \\ &\sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Calculamos la adjunta de  $A$ .

<sup>2</sup> Calculamos la traspuesta de la adjunta de  $A$ .

<sup>3</sup>  $1^a f \leftrightarrow 2^a f$ .

<sup>4</sup>  $1^a f - 2^a f$ .

<sup>5</sup>  $1^a f \cdot 1/2$ ;  $2^a f \cdot (-1)$ .

**Ejercicio 7:** Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

\* \* \*

(1 PUNTO)

**Solución:**

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \stackrel{1}{\Rightarrow} x \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \stackrel{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x \cdot x^3 - 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

---

<sup>1</sup> Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna.

<sup>2</sup> El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

**Ejercicio 8:** Halla el valor del parámetro  $k$  para que la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$  sea de 2 unidades:

$$r \equiv \begin{cases} x-2z=3 \\ y-2=0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-k}{-1} \quad (1,3 \text{ PUNTOS})$$

\* \* \*

**Solución:**

Hallamos una determinación lineal de cada una de las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x-2z=3 \\ y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3+2z \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3+2\alpha \\ y=2 \\ z=\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(3,2,0) \\ \vec{u}=(2,0,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-k}{-1} \rightarrow \begin{cases} Q(1,-3,k) \\ \vec{v}=(0,1,-1) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas:

$$\frac{2}{0} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$$

Por tanto, como  $[\vec{QP}]=(2,5,-k)$ :

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{QP}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -k \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{|-2k-2+10|}{|-\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}|} = \frac{|8-2k|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|8-2k|}{3}$$

Como la distancia es 2:

$$\frac{|8-2k|}{3} = 2 \Rightarrow |8-2k| = 6 \Rightarrow 8-2k = \pm 6 \Rightarrow 4-k = \pm 3 \Rightarrow k = 4 \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} k=7 \\ k=1 \end{cases}$$