1) (1,5p) Define función continua en un punto. Encuentra los valores de los parámetros p y q para que la siguiente función sea continua en x=0:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+pe^{x}}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0\\ q & \text{si } x=0\end{cases}$$

2) (1p) Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x)=\frac{x+1}{e^{x}}$$

3) (1p) Dada la siguiente función, demuestra que existe α en (0,1) tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona los resultados teóricos que utilices:

$$f(x)=2x^{3}+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$$

4) (1,5p) Define primitiva de una función. Halla una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:

$$f(x)=\frac{1+x}{1+x^{2}}$$

5) (1,5p) Discute y resuelve, en su caso, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x+ay+az=1\\ x+a^{2}y+z=a\\ ax+ay+z=1\end{array}\right\}$$

6) (1,5p) Define matriz inversible. Resuelve la ecuación matricial siguiente y comprueba el resultado:

$$\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

7) (1p) Si A(-1,0,3) y B(1,4,7), halla las ecuaciones generales de los planos perpendiculares al segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.

8) (1p) Halla la ecuación continua de la altura relativa al vértice A del triángulo de vértices los puntos A(2,-13,3), B(0,-2,1) y C(4,1,1).

Ejercicio 1: *Define función continua en un punto. Encuentra los valores de los parámetros p y q para que la siguiente función sea continua en x=0:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+pe^{x}}{1+e^{1/x}} & si\ x\neq 0 \\ q & si\ x=0 \end{cases}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

El límite de la función f en 0 debe coincidir con f(0):

- $f(0)=q$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1+pe^{x}}{1+e^{1/x}}=\dfrac{1+p}{1+e^{1/0^-}}=\dfrac{1+p}{1+e^{-\infty}}=\dfrac{1+p}{1+0}=1+p$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1+pe^{x}}{1+e^{1/x}}=\dfrac{1+p}{1+e^{1/0^+}}=\dfrac{1+p}{1+e^{+\infty}}=\dfrac{1+p}{1+\infty}=0$

Por tanto:

$$q=1+p=0 \Rightarrow \begin{cases} q=0 \\ 1+p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=0 \\ p=-1 \end{cases}$$

Ejercicio 2: *Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de la función:*

$$f(x)=\frac{x+1}{e^x}$$ *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Para estudiar la concavidad y la convexidad utilizamos el criterio de la derivada segunda:

$$f'(x)=\frac{1\cdot e^x-(x+1)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x\cdot(1-x-1)}{e^{2x}}=\frac{-x}{e^x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{-1\cdot e^x+x\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x\cdot(-1+x)}{e^{2x}}=\frac{x-1}{e^x}$$

Intervalos	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
f" es	-	+
f es	cóncava	convexa

Como f' es continua en x=1 (por ser derivable en dicho punto), entonces, por el criterio de la variación del signo de la derivada segunda,[1] la función tiene un punto de inflexión en x=1, cuya ordenada es y=2/e.

[1] El estudio de los puntos de inflexión también puede hacerse por el criterio de la derivada tercera.

Ejercicio 3: *Dada la siguiente función, demuestra que existe $\alpha\in(0,1)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona los resultados teóricos que utilices:*

$$f(x)=2x^3+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$$ (1 PUNTO)

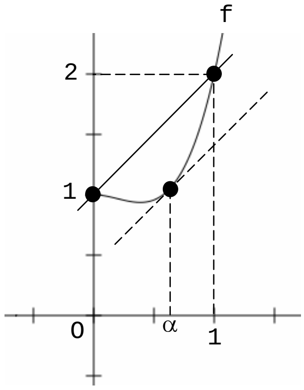
* * *

Solución:

Primero[1] derivamos la función:

$$f'(x)=6x^2-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)'=6x^2-\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$$

* * *



Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange,[2] existe α en el intervalo abierto (0,1) tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{2-1}{1}=1$$

En efecto:

1ª) f es continua en [0,1] por ser derivable en R.

2ª) f es derivable en (0,1) por serlo en R.

[1] En realidad el primer cálculo que hay que hacer es [f(1)-f(0)]/(1-0). Como sale 1, podemos aplicar el teorema de Lagrange al intervalo [0,1], que es lo que hacemos en el texto.

[2] También podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones de la propiedad de Darboux o que la función g(x)=f'(x)-1 cumple las del teorema de Bolzano o que la función g(x)=f(x)-x cumple las del teorema de Rolle.

Ejercicio 4: *Define primitiva de una función. Halla una primitiva de la siguiente función y comprueba el resultado:*

$$f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$$ *(1,5 PUNTOS)*

* * *

Solución:

$$\int\frac{1+x}{1+x^2}\cdot dx=\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}\right)\cdot dx=\int\frac{1}{1+x^2}\cdot dx+\int\frac{x}{1+x^2}\cdot dx \overset{1}{=}$$

$$=\int\frac{1}{1+x^2}\cdot dx+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x}{1+x^2}\cdot dx \overset{2}{=} \operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2)+C=$$

Comprobación:

$$\left[\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2)\right]'=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x=\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}=\frac{1+x}{1+x^2}$$

---

1 Multiplicamos y dividimos la segunda integral por 2.

2 La primera integral es inmediata de tipo arco tangente y la segunda, casi inmediata de tipo logaritmo. Ésta también puede hacerse con el cambio de variable $1+x^2=t$, $2x\cdot dx=dt$.

Ejercicio 5: *Discute y resuelve, en su caso, el sistema:*

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+az=1 \\ x+a^2y+z=a \\ ax+ay+z=1 \end{array}\right\}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a & 1 \\ 0 & a^2-a & 1-a & a-1 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & a & a & 1 \\ 0 & \mathbf{a^2-a} & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2-a-a^2} & 0 \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2-a=0 \\ 2-a-a^2=0 \end{cases} \overset{4}{\Rightarrow} \begin{cases} a(a-1)=0 \\ -(a-1)(a+2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \ a=1 \\ a=1, \ a=-2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-2, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 2y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2y \\ z=-1-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1-2\alpha \end{cases}$$

2º) Si a=0, el sistema es incompatible:[6]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{7}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

3º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow x=1-y-z \Rightarrow \begin{cases} x=1-\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+az=1 \\ a(a-1)y+(1-a)z=a-1 \\ (2-a-a^2)z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow a(a-1)y=a-1 \Rightarrow \boxed{y=1/a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1-ay-az=1-1=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf-a·1ªf.
2 3ªf+2ªf.
3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar luego (caso 4º).
4 Factorizamos los polinomios.
5 2ªf·1/3; eliminamos la última ecuación por trivial.
6 Ya que la tercera ecuación es incompatible.
7 3ªf-2·2ªf.

Ejercicio 6: *Define matriz inversible. Resuelve la ecuación matricial siguiente y comprueba el resultado:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1,5 PUNTOS)

* * *

Solución:

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-6+1 & -6+6+0 \\ 3-4+1 & -3+4+0 \\ 0+0+1 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * *

Otra forma de hacerlo es la siguiente:[6]

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{7}{\rightarrow} A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{8}{\rightarrow} (A^*)' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{(A^*)'}{|A|} \overset{9}{=} \frac{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

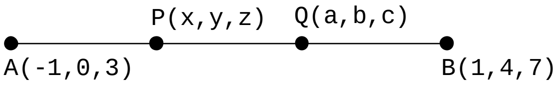
1 1ªf↔2ªf.
2 2ªf-2·1ªf.
3 2ªf+3ªf; 1ªf-3ªf.
4 1ªf+2·2ªf.
5 2ªf·(-1).
6 También puede calcularse la inversa de A por Gauss.
7 Calculamos la adjunta de la matriz A.
8 Calculamos la traspuesta de la adjunta.
9 Ya que |A|=1.

Ejercicio 7: Si A(-1,0,3) y B(1,4,7), halla las ecuaciones generales de los planos perpendiculares al segmento AB que lo dividen en tres partes iguales. *(1 PUNTO)*

* * *

Solución:

Sean P y Q los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales:



Evidentemente:

$$[\overrightarrow{AB}]=3\cdot[\overrightarrow{AP}] \Rightarrow (2,4,4)=3(x+1,y,z-3) \Rightarrow \begin{cases} 2=3x+3 \\ 4=3y \\ 4=3z-9 \end{cases} \Rightarrow P(-1/3,4/3,13/3)$$

Como Q es el punto medio del segmento PB:

$$a=\frac{-1/3+1}{2}=\frac{1}{3};\ b=\frac{4/3+4}{2}=\frac{8}{3};\ c=\frac{13/3+7}{2}=\frac{17}{3} \Rightarrow Q(1/3,8/3,17/3)$$

Como $[\overrightarrow{AB}]=(2,4,4)=2\cdot(1,2,2)$, las ecuaciones generales de los planos perpendiculares al segmento AB que pasan por P y Q son las siguientes:

$$\begin{cases} \pi\equiv x+2y+2z+D=0 \\ \pi'\equiv x+2y+2z+D'=0 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} \pi\equiv -1/3+8/3+26/3+D=0 \\ \pi'\equiv 1/3+16/3+34/3+D'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=-11 \\ D'=-17 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi\equiv x+2y+2z-11=0 \\ \pi'\equiv x+2y+2z-17=0 \end{cases}$$

[1] Ya que $P\in\pi$ y $Q\in\pi'$.

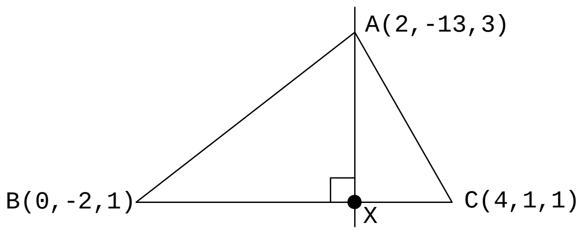
Ejercicio 8: *Halla la ecuación continua de la altura relativa al vértice A del triángulo de vértices los puntos A(2,-13,3), B(0,-2,1) y C(4,1,1).* (1 PUNTO)

* * *

Solución:

Sea ABC el triángulo dado. Trazamos la altura relativa al vértice A, que corta al lado opuesto en X.

Como la recta BC pasa por el punto B(0,-2,1) y $[\overrightarrow{BC}]=(4,3,0)$ es un vector direccional, sus ecuaciones paramétricas son las siguientes:



$$BC \equiv \begin{cases} x=4\alpha \\ y=-2+3\alpha \\ z=1 \end{cases}$$

Como X está en la recta BC, satisface su ecuación: $X(4\alpha,-2+3\alpha,1)$.

Como los vectores $[\overrightarrow{BC}]$ y $[\overrightarrow{AX}]=(-2+4\alpha,11+3\alpha,-2)$ son perpendiculares, su producto escalar es cero:

$$[\overrightarrow{BC}]\cdot[\overrightarrow{AX}]=0 \Rightarrow (4,3,0)\cdot(-2+4\alpha,11+3\alpha,-2)=0 \Rightarrow -8+16\alpha+33+9\alpha=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\alpha=-25 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow [\overrightarrow{AX}]=(-6,8,-2)=-2\cdot(3,-4,1)$$

Por tanto:

$$AX \equiv \frac{x-2}{3}=\frac{y+13}{-4}=\frac{z-3}{1}$$

* * *

El parámetro α también se puede calcular teniendo en cuenta que el punto X pertenece al plano perpendicular a BC que pasa por A; o que X es el punto de la recta BC más próximo a A; o aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ABX (en este caso, además de X, te saldrá como solución extraña B).[1] También puede hallarse la altura calculando un vector direccional: el producto vectorial del vector $[\overrightarrow{BC}]$ y el característico del plano ABC, ya que ambos son perpendiculares a dicha recta; o hallando el punto X(x,y,z) teniendo en cuenta que el vector $[\overrightarrow{BX}]$ es la proyección del vector $[\overrightarrow{BA}]$ sobre el vector $[\overrightarrow{BC}]$. Por último, se puede obtener la altura como intersección del plano ABC y el perpendicular a la recta BC que pasa por A.

[1] Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo ACX, siempre sale como una de las soluciones el punto A de la recta AB, ya que, si en la fórmula del teorema, sustituyes X por A, se obtiene $AA^2+AC^2=AC^2$, esto es, $AC^2=AC^2$, lo que siempre es cierto.