

Ejemplos

Ejemplo 1: $\int \frac{1}{(x-1)^3} \cdot dx \stackrel{1}{=} \int (x-1)^{-3} \cdot dx = \frac{(x-1)^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{-1}{2(x-1)^2} + C$

Ejemplo 2: $\int \frac{x-1}{x^2-2x+5} \cdot dx \stackrel{2}{=} \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2-2x+5) + C$

Ejemplo 3: $\int \frac{x}{1+x^4} \cdot dx \stackrel{3}{=} \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \arctan x^2 + C$

Ejemplo 4: $\int \frac{x^4-x^3-x^2+2x+3}{x^3-2x^2+x} \cdot dx \stackrel{*}{=} \int (x+1) \cdot dx + \int \frac{x+3}{x^3-2x^2+x} \cdot dx = \frac{x^2}{2} + x + \int \frac{x+3}{x(x-1)^2} \cdot dx \stackrel{4}{=}$

$$(*) \quad \frac{x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} \left| \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x+1} \right.$$

$$\frac{-x^4 + 2x^3 - x^2}{x^3 - 2x^2 + 2x + 3}$$

$$\frac{-x^3 + 2x^2 - x}{x+3}$$

Ejemplo 5: $\int \frac{x^3-2x+5}{x^2} \cdot dx = \int \left(x - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} \right) \cdot dx = \int x \cdot dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx + 5 \cdot \int x^{-2} \cdot dx =$

$$= \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \ln|x| + 5 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot \ln|x| - \frac{5}{x} + C$$

Ejemplo 6: $\int \frac{x-3}{(x-4)^3} \cdot dx \stackrel{5}{=} \int \frac{t+1}{t^3} \cdot dt = \int (t^{-2} + t^{-3}) \cdot dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + C =$

$$= -\frac{1}{x-4} - \frac{1}{2(x-4)^2} + C$$

Ejemplo 7: $\int \frac{x-7}{x^2-2x+5} \cdot dx = \int \frac{x-7}{(x-1)^2+2^2} \cdot dx \stackrel{6}{=} \int \frac{2t-6}{4t^2+4} \cdot 2dt = \int \frac{t-3}{t^2+1} \cdot dt = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot dt - 3 \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot dt - 3 \cdot \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \ln(t^2+1) - 3 \cdot \arctan t + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x^2-2x+5}{4} - 3 \cdot \arctan \frac{x-1}{2} + C \stackrel{7}{=} \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2-2x+5) - 3 \cdot \arctan \frac{x-1}{2} + D$$

Ejemplo 8: $\int \frac{x+3}{x(x-1)^2} \cdot dx \stackrel{*}{=} \int \frac{3}{x} \cdot dx - \int \frac{3}{x-1} \cdot dx + \int \frac{4}{(x-1)^2} \cdot dx = 3 \cdot \int \frac{1}{x} \cdot dx - 3 \cdot \int \frac{1}{x-1} \cdot dx +$

$$+ 4 \cdot \int (x-1)^{-2} \cdot dx = 3 \cdot \ln|x| - 3 \cdot \ln|x-1| + 4 \cdot \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C = 3 \cdot \ln|x| - 3 \cdot \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C$$

¹ También se resuelve con el cambio de variable: $x-1=t \Rightarrow dx=dt$.

² También se resuelve con el cambio de variable: $x^2-2x+5=t \Rightarrow (2x-2) \cdot dx=dt$.

³ También se resuelve con el cambio de variable: $x^2=t \Rightarrow 2x \cdot dx=dt$.

⁴ Sigue en el ejemplo 8.

⁵ Se hace el cambio $x-4=t \Rightarrow dx=dt$.

⁶ Se hace el cambio de variable: $x-1=2t \Rightarrow dx=2 \cdot dt$.

⁷ He aplicado las propiedades de los logaritmos y he sustituido $-(1/2) \cdot \ln 4 + C$ por la constante D.

$$(*) \quad \frac{x+3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} \Rightarrow x+3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=0 \Rightarrow 3=A \\ \text{Si } x=1 \Rightarrow 4=C \\ \text{Si } x=2 \Rightarrow 5=A+2B+2C \Rightarrow 5=3+2B+8 \Rightarrow 2B=-6 \Rightarrow B=-3 \end{cases}$$

Ejemplo 9: $\int \frac{1}{1-\sin x} \cdot dx = \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} \cdot dx = \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} \cdot dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot dx \stackrel{1}{=} \operatorname{tg} x + \sec x + C$

Ejemplo 10: $\int \sqrt{1-x^2} \cdot dx \stackrel{2}{=} \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \cdot dt = \int \cos^2 t \cdot dt \stackrel{3}{=}$

Ejemplo 11: $\int \ln x \cdot dx \stackrel{*}{=} x \cdot \ln x - \int 1 \cdot dx = x \cdot \ln x - x + C$

$$(*) \quad \begin{array}{c|c|c} S & D & I \\ \hline + & \ln x & 1 \\ \hline - & \frac{1}{x} & x \end{array}$$

Ejemplo 12: $\int \cos^2 x \cdot dx \stackrel{*}{=} \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \cdot dx = \sin x \cdot \cos x + \int (1-\cos^2 x) \cdot dx =$
 $= \sin x \cdot \cos x + \int 1 \cdot dx - \int \cos^2 x \cdot dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \cdot dx \stackrel{4}{\Rightarrow}$
 $\Rightarrow 2 \cdot \int \cos^2 x \cdot dx = \sin x \cdot \cos x + x \Rightarrow \int \cos^2 x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x + C$

$$(*) \quad \begin{array}{c|c|c} S & D & I \\ \hline + & \cos x & \cos x \\ \hline - & -\sin x & \sin x \end{array}$$

Ejemplo 13: $\int x \cdot \ln^2 x \cdot dx \stackrel{*}{=} \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int x \cdot \ln x \cdot dx \stackrel{**}{=} \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx \right) + C =$
 $= \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln^2 x - \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln^2 x - \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln x + \frac{1}{4} \cdot x^2 + C$

$$(*) \quad \begin{array}{c|c|c} S & D & I \\ \hline + & \ln^2 x & x \\ \hline - & \frac{2 \cdot \ln x}{x} & \frac{x^2}{2} \end{array}$$

$$(**) \quad \begin{array}{c|c|c} S & D & I \\ \hline + & \ln x & x \\ \hline - & \frac{1}{x} & \frac{x^2}{2} \end{array}$$

¹ La primera integral es inmediata y la segunda, casi inmediata de tipo potencial; aunque si recuerdas la derivada de la secante, resulta ser también inmediata.

² Se hace el cambio de variable: $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t \cdot dt$.

³ Sigue en el ejemplo 12.

⁴ Paso esta última integral al primer miembro pues coincide con la de partida.