Índice: El concepto de derivada. Continuidad y derivabilidad. Derivadas laterales. Problemas.

1.- El concepto de derivada

Se llama *derivada de la función f en un punto x_0 de su dominio,* y se denota por $f'(x_0)$, al número que resulta al calcular el siguiente límite:[1]

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si este límite no existe o es infinito, se dice que *la función f no es derivable en x_0.*

* * *

Se pueden presentar, pues, tres situaciones:

1ª) No tiene sentido plantear la derivada[2] de f en x_0.

Es lo que sucede, por ejemplo, con la función $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$ en $x=0$.

2ª) La función f no es derivable en x_0:

a) Porque el límite no existe.

Es lo que sucede, por ejemplo, en el origen de coordenadas con la función $f(x)=x\cdot\text{sen}(1/x)$ si $x\neq 0$ y $f(0)=0$:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\text{sen}(1/x)}{x}=\lim_{x\to 0}\text{sen}(1/x)$$

Pero este límite no existe.

b) Porque el límite es infinito.

Es lo que sucede, por ejemplo, con la función $y=\sqrt[3]{x}$ en el origen de coordenadas:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

3ª) La función f es derivable en x_0.

En este caso, $f'(x_0)$ es, como ya sabemos, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x_0. Por tanto, la ecuación punto-pendiente de dicha recta es:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Afirmar, pues, que una función es derivable en x_0 equivale a decir

---

[1] Si no tiene sentido plantear este límite, carece de sentido hablar de derivada en ese punto.

[2] Observa que $\text{Dom}(\Delta y/\Delta x)=\text{Dom}(f)-\{x_0\}$. Por tanto, si no tiene sentido plantear la derivada en x_0, tampoco lo tiene el límite de la función en dicho punto, y viceversa.

que tiene recta tangente no vertical en dicho punto.

Por ejemplo, calculemos la tangente en el origen de coordenadas a la gráfica de la función dada por $f(x)=x^2\cdot \text{sen}(1/x)$ si $x\neq 0$ y $f(0)=0$:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot \text{sen}(1/x)}{x}=\lim_{x\to 0}[x\cdot \text{sen}(1/x)]=0$$

Por tanto, la recta tangente es:

$$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\ \Rightarrow\ y-0=0\cdot(x-0)\ \Rightarrow\ y=0$$

2.- Continuidad y derivabilidad

Si f es derivable en x_0, entonces es continua en x_0.

En efecto:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)+f(x_0)\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+\lim_{x\to x_0}f(x_0)=f'(x_0)\cdot 0+f(x_0)\stackrel{1}{=}f(x_0)$$

* * *

La propiedad recíproca no es cierta: una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en ese punto. Por ejemplo, es lo que sucede en el origen de coordenadas con la función $y=\sqrt[3]{x}$.

3.- Derivadas laterales

Se llama *derivada lateral izquierda de la función f en un punto x_0 de su dominio,* y se denota por $f'_-(x_0)$, al número que resulta al calcular el siguiente límite:[2]

$$f'_-(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si este límite no existe o es infinito, se dice que *la función f no es derivable por la izquierda en x_0.*

* * *

Como se ha visto en la lección anterior, $f'_-(x_0)$ es la pendiente de la tangente lateral izquierda a la gráfica de f en x_0. Por lo demás, se pueden presentar las mismas situaciones que hemos visto con la

[1] Como f es derivable en x_0, $f'(x_0)\cdot 0=0$, ya que $f'(x_0)$ es un número real.
[2] Si no tiene sentido plantear este límite, carece de sentido hablar en ese punto de derivada lateral izquierda.

derivada, así que no las vamos a repetir.

Del mismo modo se define la *derivada lateral derecha de f en* x_0, que se denota por $f'_+(x_0)$, y que geométricamente es la pendiente de la tangente lateral derecha a la gráfica de f en x_0.

* * *

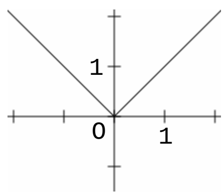
Si las tangentes laterales a la gráfica de f en un punto son rectas distintas, se trata de un *punto anguloso*.

Si la tangente es vertical y las "derivadas laterales" son una $+\infty$ y la otra $-\infty$, se trata de un *punto de retroceso*.

* * *

Por ejemplo, calculemos en el origen de coordenadas las derivadas laterales de la función $f(x)=|x|$:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x>0 \end{cases}$$



$$f'_-(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-1)=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}1=1$$

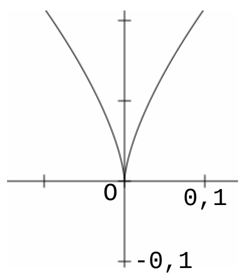
Esta función no es derivable en 0, pero sí lo es por la izquierda y por la derecha. En consecuencia, no hay recta tangente en dicho punto, pero sí tangentes laterales: $y=-x$ es la tangente lateral izquierda e $y=x$, la derecha. Se trata de un punto anguloso.

* * *

Por ejemplo, calculemos en el origen de coordenadas las derivadas laterales de la función $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$:

$$f'_-(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{\frac{1}{0^-}}=-\infty$$

$$f'_+(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$



Esta función no es derivable ni por la izquierda ni por la derecha en 0. Sin embargo, al ser el cociente incremental un infinito, la tangente en el origen de coordenadas es, como ya sabemos, la recta vertical $x=0$. En este caso se trata de un punto de retroceso.

4.- Problemas

1) Define derivada lateral derecha de una función en un punto.

2) Prueba que si f es derivable por la izquierda en x_0, entonces es continua por la izquierda en x_0.

3) Halla la tangente a la recta de ecuación $y=3x-2$ en el punto de abscisa 0.

4) Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ x^3 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ en $x=0$

b) $f(x)=\sqrt[n]{x}$ en $x=0$

c) $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ en $x=0$

d) $f(x)=|3x-6|$ en $x=2$

e) $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ en $x=0$

f) $f(x)=\sqrt{x}\cdot \operatorname{tg} x$ en $x=0$

5) Halla k para que f sea continua. Dibuja su gráfica y encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1 y en el de abscisa 1/2:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\leq 0 \\ x^2-x+k & \text{si } x>0 \end{cases}$$

6) Dada la siguiente función: a) halla los valores de a y b para que sea continua en R; b) utiliza las definiciones de derivadas laterales para comprobar que es derivable en $x=0$ y que no lo es en $x=1$; c) calcula la pendiente[1] de la gráfica en $x=3$:

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } x<0 \\ a+2x^2 & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ b/x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

7) Calcula el valor del parámetro k para que la función f sea continua. ¿Existe la derivada de f en $x=1$? Halla la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa 2:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\leq 1 \\ k/(x+1) & \text{si } x>1 \end{cases}$$

8) Dada la función $f(x)=\begin{cases} a-bx^2 & \text{si } |x|\leq 2 \\ 1/|x| & \text{si } |x|>2 \end{cases}$, halla los parámetros a y b para que exista $f'(2)$.

9) Halla las tangentes laterales en el origen de coordenadas a la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} (1+x)^{10} & \text{si } x<0 \\ 1+x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$.

[1] Se llama *pendiente de una curva en un punto* a la pendiente de la tangente en ese punto. Del mismo modo se definen las *pendientes laterales*.