

Índice: Comparación de infinitésimos. La recta tangente. Existencia de la recta tangente. Significado geométrico del cociente incremental. Las tangentes laterales. Problemas.

1.- Comparación de infinitésimos

Las funciones $f(x)=x$, $g(x)=3x$ y $h(x)=x^2$, por ejemplo, son infinitésimos en $x=0$. Cuando x tiende a cero, ¿cuál de ellas tiende más rápidamente a cero? La tabla siguiente nos lo muestra:

x	f(x)	g(x)	h(x)
1/10	1/10	3/10	1/100
1/100	1/100	3/100	1/10000
1/1000	1/1000	3/1000	1/1000000
...	...	...	...
↓	↓	↓	↓
0	0	0	0

Evidentemente, $h(x)$ tiende a cero mucho más rápidamente que las otras dos; mientras que éstas, $f(x)$ y $g(x)$, lo hacen, por así decir, a la par.

La forma más sencilla de comparar dos infinitésimos consiste en calcular el límite de su cociente.¹ Observa que h/f es un infinitésimo en $x=0$, f/h es un infinito² y f/g no es ni una cosa ni otra.

* * *

Más precisamente, si f y g son dos infinitésimos³ en x_0 :

- a)** f es de orden superior a g si f/g es un infinitésimo en x_0 .
- b)** f es de orden inferior a g si f/g es un infinito⁴ en x_0 .
- c)** f y g son del mismo orden si el límite de su cociente es un número real distinto de cero.
- d)** f y g no son comparables si el límite de su cociente no existe.⁵

Así, $h(x)=x^2$ es un infinitésimo en $x=0$ de orden superior a $f(x)=x$; mientras que $f(x)=x$ y $g(x)=3x$ son infinitésimos del mismo orden:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{h(x)} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{x^2} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3$$

¹ Si este límite no tiene sentido plantearlo, tampoco lo tiene la correspondiente comparación de infinitésimos. En lo que sigue no va a presentarse este caso.

² Recuerda la definición de infinito vista en la lección L-9.

³ Averiguar si una función es o no un infinitésimo (o un infinito) requiere el cálculo de un límite. Por tanto, cuando este límite no tenga sentido plantearlo, tampoco tendrá sentido plantearse la cuestión de si dicha función es o no un infinitésimo.

⁴ 0, lo que es lo mismo, g/f es un infinitésimo en x_0 .

⁵ Salvo que se trate de un infinito. Observa que el límite en 0 de x/x^2 no existe, pero, al tratarse de un infinito, x y x^2 sí son comparables.

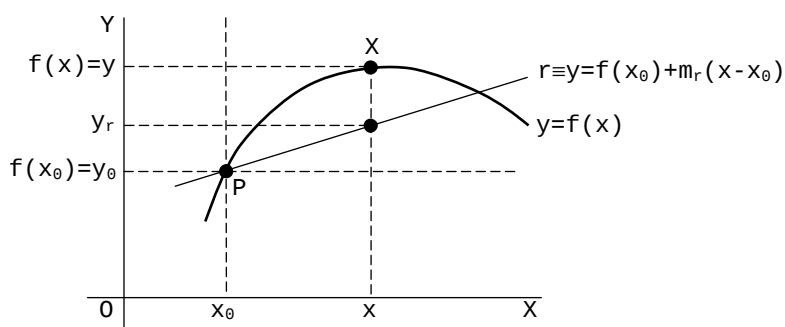
2.- La recta tangente

Consideremos una función $y=f(x)$ y un punto $P(x_0, y_0)$ de su gráfica.

Nos proponemos la siguiente cuestión: ¿cuál de las rectas que pasa por P se encuentra más próxima a la gráfica de f en las proximidades de dicho punto?¹

Para responderla, necesitamos “medir” esa proximidad de alguna manera. Veamos cómo.

Supongamos que $X(x, y)$ sea un punto que se mueve libremente sobre la gráfica de la función.



Observa lo siguiente:²

- $\Delta x = x - x_0$ es la distancia³ entre el punto X y la recta vertical que pasa por P .
- $\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ es la distancia³ entre el punto X y la recta horizontal que pasa por P .
- Si r es una recta inclinada ($m_r \neq 0$) que pasa por P , su ecuación punto-pendiente es $y - f(x_0) = m_r(x - x_0)$.

Por tanto,⁴ $y - y_r = f(x) - f(x_0) - m_r(x - x_0) = \Delta y - m_r \cdot \Delta x$ nos da una medida³ de la proximidad entre el punto X y la recta r .

* * *

Si Δx e Δy son infinitésimos comparables en x_0 ,⁵ entonces sólo se pueden dar tres casos:

1º) Que Δy sea de orden superior a Δx :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y - m_r \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - m_r \right) = 0 - m_r = -m_r \neq 0$$

En este caso, todos los infinitésimos $(\Delta y - m_r \cdot \Delta x)$ son del mismo orden que Δx , excepto Δy , el que mide la proximidad de X a la recta horizontal que pasa por P , que es de orden superior.

¹ Basta recordar la idea intuitiva que tenemos de recta tangente para darse cuenta de que vamos en su busca.

² Δx e Δy se leen *incremento de x* e *incremento de y*, respectivamente.

³ Salvo el signo, ya que esta diferencia puede ser también negativa (o nula).

⁴ y_r es la ordenada del punto de la recta r que tiene la misma abscisa que el punto X .

⁵ En el próximo apartado veremos las posibles situaciones que se pueden presentar.

2º) Que Δy sea de orden inferior a Δx :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y - m_r \cdot \Delta x}{\Delta y} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 - m_r \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \stackrel{1}{=} 1 - m_r \cdot 0 = 1$$

En este caso, todos los infinitésimos son del mismo orden² que Δy , excepto Δx , el que mide la proximidad de x a la recta vertical que pasa por P , que es de orden superior.

3º) Que Δx e Δy sean del mismo orden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = L \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y - m_r \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - m_r \right) = L - m_r$$

En este caso, todos los infinitésimos son del mismo orden que Δx , excepto el que mide la proximidad de x a la recta inclinada que pasa por P que tiene por pendiente $m_r = L$, que es de orden superior.

* * *

Pues bien, la recta asociada al infinitésimo de orden superior es, por definición, *la recta tangente* a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x_0 : la recta horizontal que pasa por P (si se da el primer caso), la recta vertical (si se da el segundo) o la recta inclinada de pendiente $m_r = L$ (si se da el tercero).

3.- Existencia de la recta tangente

En el apartado anterior hemos supuesto que Δx e Δy eran infinitésimos en x_0 (y además comparables). Ahora bien, para que Δx e Δy sean infinitésimos en x_0 es necesario que f sea continua en x_0 y que tenga sentido plantear el límite de f en dicho punto.³

En efecto, Δx e Δy (y, por tanto, $\Delta y - m_r \cdot \Delta x$) son funciones que tienen el mismo dominio que f , ya que x es la abscisa de un punto de la gráfica de esta última función. Por tanto, Δx es un infinitésimo en x_0 solamente si tiene sentido plantear⁴ el límite de f en x_0 . Para que también Δy sea un infinitésimo en x_0 (y, por tanto, también lo sean las diferencias $\Delta y - m_r \cdot \Delta x$) es necesario además que f sea continua en x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta y = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

¹ Como $\Delta y / \Delta x$ es un infinito en x_0 , $\Delta x / \Delta y$ es un infinitésimo en x_0 .

² Concretamente, infinitésimos equivalentes.

³ Recuerda que una función también es continua en los puntos de su dominio en los que no tiene sentido plantear el límite.

⁴ Si no tiene sentido plantear el límite de f en x_0 , entonces tampoco tiene sentido plantear si Δx es o no un infinitésimo en x_0 . Recuerda lo dicho en la nota 2 de la primera página.

Teniendo esto presente, se pueden presentar las tres situaciones siguientes:

1ª) No tiene sentido hablar de recta tangente en aquellos puntos del dominio de f en los que Δx e Δy no sean ambos infinitésimos (o ni siquiera tenga sentido plantearse si lo son o no).¹

Por ejemplo, es lo que sucede en el origen de coordenadas con la función *signo* (por no ser continua en dicho punto) o con la función $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$ (por carecer de sentido su límite en ese punto).²

2ª) No existe recta tangente en aquellos puntos del dominio de f en los que los infinitésimos Δx e Δy no son comparables.

Por ejemplo, es lo que sucede en el origen de coordenadas con la función $f(x)=x \cdot \text{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0)=0$.

3ª) Existe recta tangente en aquellos puntos del dominio de f en los que los infinitésimos Δx e Δy son comparables:

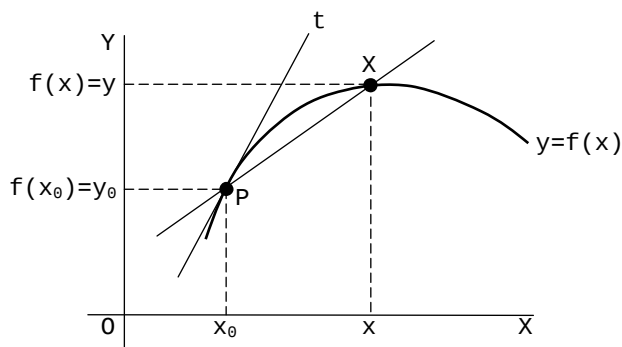
a) Si $\Delta y/\Delta x$ es un infinito en x_0 , la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0 es la recta vertical $x=x_0$.

b) Si el límite en x_0 de $\Delta y/\Delta x$ es un número real, la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x_0 tiene por pendiente:

$$m_t \stackrel{3}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4.- Significado geométrico del cociente incremental

El siguiente gráfico repite el anterior, pero se ha eliminado lo que ahora no interesa y se han añadido la recta PX y la tangente⁴ en x_0 :



¹ Esto es, en los puntos en los que la función no sea continua o, siendo continua, no tenga sentido plantear su límite.

² Ya que su dominio es $\{0\} \cup [1, +\infty)$.

³ Hemos sustituido el *cociente incremental* $\Delta y/\Delta x$ por su valor.

⁴ Suponemos, pues, que f cumple en x_0 las condiciones que se requieren para que dicha recta exista.

Como la distancia del punto X a la recta PX es cero, resulta que la recta PX es la más próxima a X de todas las que pasan por P. Por tanto, si le seguimos la pista a dicha recta conforme el punto X tiende al punto P, daremos con la recta tangente. Dicho de otro modo, la recta tangente en P es el límite de la recta PX cuando X tiende a P:

$$t = \lim_{X \rightarrow P} PX$$

Y si la tangente no es vertical y m_{PX} es la pendiente de la recta PX, tendremos:

$$m_t = \lim_{X \rightarrow P} m_{PX} \quad (*)$$

Ahora bien, como $\vec{PX} = (x - x_0, y - y_0) = (x - x_0, f(x) - f(x_0)) = (\Delta x, \Delta y)$ es un vector direccional de la recta PX, su pendiente puede expresarse de las siguientes maneras:

$$m_{PX} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vemos, pues, que el cociente incremental es precisamente la pendiente de la recta PX.

Sustituyendo ahora cualquiera de los valores de m_{PX} en la fórmula (*), obtenemos el resultado que ya conocemos:

$$m_t \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{2}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

5.- Las tangentes laterales

Si en los apartados anteriores sustituimos los límites que en ellos aparecen por los correspondientes límites laterales, se llega de igual modo al concepto de *tangentes laterales*. La relación entre éstas y la tangente queda resumida en el siguiente cuadro:³

Recta tangente		Tangente lateral derecha			
		NTS	V	NV m_d	NE
Tangente lateral izquierda	NTS	NTS	V	NV $m_t = m_d$	NE
	V	V	V	NE	NE
	NV m_i	NV $m_t = m_i$	NE	• Si $m_i = m_d$, NV $m_t = m_i = m_d$ • Si $m_i \neq m_d$, NE	NE
	NE	NE	NE	NE	NE

¹ Cuando el punto X tiende al punto P, la abscisa de X tiende a la abscisa de P, x a x_0 .

² En lugar de $x \rightarrow x_0$, en este caso es costumbre poner $\Delta x \rightarrow 0$.

³ El significado de las siglas es el siguiente: NTS=No tiene sentido; NE=No existe; V=Vertical, NV=No vertical; m_t =pendiente de la tangente; m_i =pendiente de la tangente lateral izquierda; m_d =pendiente de la tangente lateral derecha.

Por ejemplo, calculemos las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x^3+x^2}$ en los puntos $P(-1,0)$, $O(0,0)$ y $Q(3,6)$:

$$m_t = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{x+1} \stackrel{1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \sqrt{\frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} = \sqrt{\frac{1}{0^+}} = +\infty$$

Como el cociente incremental es un infinito,² la tangente (y la tangente lateral derecha)³ en P es la recta vertical $x=-1$.

Estudiemos ahora el origen de coordenadas:

$$m_i = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x \cdot \sqrt{x+1}}{x} = - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \sqrt{x+1} = -1$$

$$m_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x \cdot \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x+1} = 1$$

Esta función no tiene recta tangente en el origen de coordenadas, pero sí tangentes laterales: $y=-x$ es la tangente lateral izquierda e $y=x$, la derecha.

Por último, veamos el punto Q :

$$m_t = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^3+x^2} - 6}{x - 3} \stackrel{4}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3+x^2-36}{(x-3)(\sqrt{x^3+x^2}+6)} \stackrel{5}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+4x+12}{\sqrt{x^3+x^2}+6} = \frac{11}{4}$$

La recta tangente en Q es:

$$y-6=(11/4) \cdot (x-3) \Rightarrow 4y-24=11x-33 \Rightarrow 11x-4y-9=0$$

6.- Problemas

1) Calcula las tangentes a las siguientes funciones en el origen de coordenadas:

a) $y=\sin x$

b) $y=\operatorname{tg} x$

c) $y=\arcsen x$

d) $y=\operatorname{arctg} x$

e) $y=\ln(1+x)$

f) $y=e^x-1$

g) $y=1-\cos x$

h) $y=(1+x)^n-1$

i) $y=\sqrt[n]{1+x}-1$

2) Halla las tangentes en $P(0,0)$ y $Q(-1,0)$ a la función:

$$y=\sqrt{x^2 \cdot \frac{1+x}{1-x}}$$

¹ Ya que $\operatorname{Dom}(f)=[-1,+\infty)$. Fíjate que, cuando x tiende a -1 , sale la indeterminación $0/0$; lo que nos está indicando que tanto Δy como Δx son infinitésimos en -1 . El que sean o no comparables dependerá de que este límite (o el de su valor absoluto, si fuese necesario) exista o no.

² No es necesario en este caso calcular el límite del valor absoluto.

³ Observa que no tiene sentido hablar de la tangente lateral izquierda.

⁴ Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador.

⁵ Descomponemos en factores el numerador y simplificamos.