JUNIO DE 2008. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+(a^2-a-1)y=-1 \\ x+(a^2-a-1)y+(a-2)z=1-a^2 \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a^2-a-1 & 0 & -1 \\ 1 & a^2-a-1 & a-2 & 1-a^2 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & a^2-a & 1 & -1 \\ 0 & a^2-a & a-1 & 1-a^2 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{a^2-a} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{a-2} & 2-a^2 \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a(a-1)=0 \\ a-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0,\ a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1 \end{cases}$$

2º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1 \end{cases}$$

3º) Si a=2, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

4º) Si a≠0, a≠1 y a≠2, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ a(a-1)y+z=-1 \\ (a-2)z=2-a^2 \end{array}\right\} \overset{6}{\Rightarrow} \boxed{z=\frac{2-a^2}{a-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(a-1)y=-1-z=-1-\frac{2-a^2}{a-2}=\frac{-a+2-2+a^2}{a-2}=\frac{a(a-1)}{a-2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{a-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=y+z=\frac{1}{a-2}+\frac{2-a^2}{a-2}=\frac{3-a^2}{a-2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3-a^2}{a-2}}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.

2 3ªf-2ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.

4 3ªf+2·2ªf.

5 3ªf+2ªf.

6 Como ya se han estudiado los casos en los que se anulan los coeficientes de las incógnitas que vamos a despejar ahora, podemos hacer esto tranquilamente.

JUNIO DE 2008. PROBLEMA A2.

Halla la ecuación del plano π que pasa por el punto P(3,-1,4) y es paralelo a las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} 5x-y+3z-4=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-3}$$ (2 PUNTOS)

Como la recta r_1 está en el plano $5x-y+3z-4=0$, el vector $(5,-1,3)$ es perpendicular a la recta.

Como la recta r_1 también está en el plano $2x-y+z-1=0$, el vector $(2,-1,1)$ es perpendicular a la recta.

Por tanto, un vector direccional[1] de dicha recta es:

$$\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$$

Por otro lado, un vector direccional de la recta r_2 es $\vec{v}=(1,2,-3)$.

Como el plano π es paralelo a ambas rectas y pasa por el punto P(3,-1,4), su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3(x-3)+3(y+1)+3(z-4)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3+y+1+z-4=0 \Rightarrow x+y+z-6=0$$

[1] Otra forma de obtener un vector direccional de la recta r_1 es calculando sus ecuaciones paramétricas, esto es, resolviendo el sistema que forman los dos planos que la determinan.

Junio de 2008. Problema B1.

Dada la matriz A, halla su inversa y úsala para encontrar la matriz X que cumple $A\cdot X\cdot A=I_2$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

(2 Puntos)

Cálculo de la inversa:

Puede hacerse mediante determinantes o por el método de Gauss:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \to A^*=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix} \to (A^*)'=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix} \to A^{-1}=\frac{(A^*)'}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{1-2}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{array}\right) \to$$

$$\to A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Comprobación[4]:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2 & 2-2\\ -1+1 & 2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$AXA=I \Rightarrow A^{-1}AXAA^{-1}=A^{-1}IA^{-1} \Rightarrow IXI=A^{-1}IA^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

---

1 2ªf-1ªf.
2 1ªf+2·2ªf.
3 2ªf·(-1).
4 Aunque no es necesario, sí que es conveniente la comprobación.

JUNIO DE 2008. PROBLEMA B2.

Dados los puntos P(4,2,1) y Q(3,3,1), encuentra los dos puntos, R_1 y R_2, del plano π tales que PQR_1 y PQR_2 son triángulos equiláteros:

$\pi \equiv x-y-2z+3=0$ (3 PUNTOS)

El lado del triángulo mide: $d(P,Q)=\sqrt{(4-3)^2+(2-3)^2+0^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

A continuación se puede seguir uno de los dos siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Las ecuaciones paramétricas del plano π son:

$$x-y-2z+3=0 \Rightarrow x=-3+y+2z \Rightarrow \begin{cases} x=-3+\alpha+2\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

Como los puntos X buscados están en el plano π: $X(-3+\alpha+2\beta,\alpha,\beta)$.

Por tanto:

$$\begin{cases} d(X,P)=\sqrt{2} \\ d(X,Q)=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(\alpha+2\beta-7)^2+(\alpha-2)^2+(\beta-1)^2}=\sqrt{2} \\ \sqrt{(\alpha+2\beta-6)^2+(\alpha-3)^2+(\beta-1)^2}=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2+4\beta^2+49+4\alpha\beta-14\alpha-28\beta+\alpha^2+4-4\alpha+\beta^2+1-2\beta=2 \\ \alpha^2+4\beta^2+36+4\alpha\beta-12\alpha-24\beta+\alpha^2+9-6\alpha+\beta^2+1-2\beta=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2+5\beta^2+4\alpha\beta-18\alpha-30\beta=-52 \\ 2\alpha^2+5\beta^2+4\alpha\beta-18\alpha-26\beta=-44 \end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} 4\beta=8 \Rightarrow \beta=2 \overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2+20+8\alpha-18\alpha-52=-44 \Rightarrow 2\alpha^2-10\alpha+12=0 \Rightarrow \alpha^2-5\alpha+6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=3 \Rightarrow R_1(4,3,2) \\ \alpha=2 \Rightarrow R_2(3,2,2) \end{cases}$$

SEGUNDO MÉTODO:

Como los puntos que andamos buscando equidistan de P y Q, se encuentran en el plano *mediador* del segmento PQ. Como el punto medio de ese segmento es M(7/2,5/2,1) y $[\overrightarrow{QP}]=(1,-1,0)$, la ecuación de dicho plano es: $x-y+D=0 \Rightarrow 7/2-5/2+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow x-y-1=0$.

Como los puntos X buscados están también en el plano π, estarán en la recta que determinan ambos planos:

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-y-2z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ 2z=1+\alpha-\alpha+3=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow X(1+\alpha,\alpha,2)$$

Como el lado del triángulo es $\sqrt{2}$:

$$d(X,P)=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(\alpha-3)^2+(\alpha-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2+9-6\alpha+\alpha^2+4-4\alpha+1=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2-10\alpha+12=0 \Rightarrow \alpha^2-5\alpha+6=0 \Rightarrow \alpha=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=3 \Rightarrow R_1(4,3,2) \\ \alpha=2 \Rightarrow R_2(3,2,2) \end{cases}$$

---

1 2ª-1ª.

2 Sustituyo este valor en la 2ª ecuación, por ejemplo.

JUNIO DE 2008. PROBLEMA C1.

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1-\cos x)}$$

(2 PUNTOS)

PRIMER LÍMITE:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} \overset{1}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1-x+1)\cdot(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{(x+2-x+2)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right) \overset{2}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \overset{3}{=} \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

SEGUNDO LÍMITE:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sqrt{1-\cos x}}{\ln(1-\cos x)} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(1-\cos x)^{1/2}}{\ln(1-\cos x)} \overset{4}{=} \lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{2}\cdot\ln(1-\cos x)}{\ln(1-\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

---

[1] Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador y por el conjugado del denominador.

[2] El límite del producto de un número por una función es igual al número por el límite de la función.

[3] Sacamos $\sqrt{x}$ factor común en el numerador y en el denominador.

[4] El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

JUNIO DE 2008. PROBLEMA C2.

Halla el máximo relativo, el mínimo relativo y la asíntota oblicua de la función:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x-1} \qquad \text{(3 PUNTOS)}$$

EXTREMOS RELATIVOS:

1º) Derivamos la función:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+2)(x-1)-(x^2+2x-2)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2x+2x-2-x^2-2x+2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

2º) Estudiamos el signo de la derivada:

+		-		-		+
↗	1	↘	1	↘	2	↗

3º) Por el criterio de la variación del signo de la primera derivada:

- En $x=0$, la función f tiene un máximo relativo que vale $y=2$.
- En $x=2$, la función f tiene un mínimo relativo que vale $y=6$.

ASÍNTOTA OBLICUA:

La recta $y=x+3$ es asíntota oblicua de la función en $+\infty$ y en $-\infty$.

Para verlo, se puede seguir uno de los dos métodos siguientes:

PRIMER MÉTODO:

- $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-2}{x-1}\overset{1}{=}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x=\pm\infty$
- $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-2}{x^2-x}\overset{2}{=}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1=1$
- $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x-2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-x^2+x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x-1}\overset{3}{=}$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty} 3=3$$

SEGUNDO MÉTODO:

Como se trata de una función racional (cociente de polinomios), puede hallarse la asíntota oblicua del siguiente modo:

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x-2 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^2+x & x+3 \\ \cline{1-1} 3x-2 & \\ -3x+3 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{x-1}=x+3+\frac{1}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x-1}=0$$

---

1 $x^2+2x-2\sim x^2$ y $x-1\sim x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

2 $x^2+2x-2\sim x^2$ y $x^2-x\sim x^2$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

3 $x-1\sim x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

JUNIO DE 2008. PROBLEMA D1.

Dada la función $f(x)=x\cdot\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)$, demuestra que existe $\alpha\in(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=-2$. Menciona los resultados teóricos que utilices. (2 Puntos)

Primero se deriva la función:

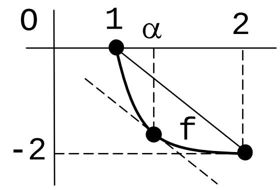
- $f'(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$
- $\operatorname{Dom}(f')=\operatorname{Dom}(f)=\mathbb{R}$

A continuación se puede seguir uno de los siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange, existe α en $(1,2)$ tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2\cdot\cos\pi-1\cdot\cos(\pi/2)}{1}=\frac{-2-0}{1}=-2$$



En efecto:

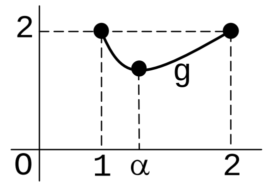
1ª) f es continua en $[1,2]$ por ser derivable en R.

2ª) f es derivable en $(1,2)$ por serlo en R.

SEGUNDO MÉTODO:

Como la función[1] $g(x)=f(x)+2x$ satisface las condiciones del teorema de Rolle, existe α en $(1,2)$ tal que $g'(\alpha)=0$. Ahora bien:

$$g'(\alpha)=0 \Rightarrow f'(\alpha)+2=0 \Rightarrow f'(\alpha)=-2$$



En efecto:

1ª) $g(1)=g(2)$:

- $g(1)=1\cdot\cos\frac{\pi}{2}+2=2$
- $g(2)=2\cdot\cos\pi+4=-2+4=2$

2ª) g es continua en $[1,2]$ por ser derivable en R.

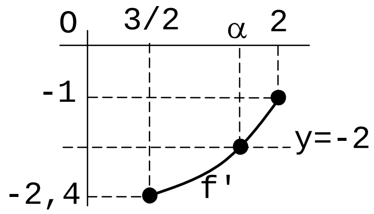
3ª) g es derivable en $(1,2)$ por serlo en R.

---

[1] Como $f'(\alpha)=-2$, es decir, como $f'(\alpha)+2=0$, hay que trabajar con una función cuya derivada se anule en $x=\alpha$. Esa función es $g(x)=f(x)+2x$.

TERCER MÉTODO:

Como la función f' satisface las condiciones de la propiedad de Darboux, existe α en (3/2,2) tal que $f'(\alpha)=-2$.



En efecto:

1ª) $f'(3/2)<-2<f'(2)$:

- $f'(1)=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=0-\frac{\pi}{2}\simeq-1,6>-2$
- $f'(2)=\cos\pi-\pi\cdot\operatorname{sen}\pi=-1>-2$
- $f'(3/2)=\cos\frac{3\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq-2,4<-2$

2ª) f' es continua en [3/2,2]:

- $[3/2,2]\subset Dom(f')=Dom(f)=R$.
- Si $a\in[3/2,2]$:

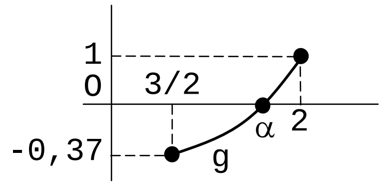
$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot a\right)-\frac{\pi}{2}\cdot a\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot a\right)=f'(a)$$

CUARTO MÉTODO:

Como la función[1] $g(x)=f'(x)+2$ satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en (3/2,2) tal que $g(\alpha)=0$.

Ahora bien:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow f'(\alpha)+2=0 \Rightarrow f'(\alpha)=-2$$



En efecto:

1ª) $g(3/2)\cdot g(2)<0$:

- $g(1)=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+2=-\frac{\pi}{2}+2\simeq0,43>0$
- $g(2)=\cos\pi-\pi\cdot\operatorname{sen}\pi+2=1>0$
- $g(3/2)=\cos\frac{3\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}+2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\simeq-0,37<0$

2ª) g es continua en [3/2,2]:

- $[3/2,2]\subset Dom(g)=Dom(f)=R$.
- Si $a\in[3/2,2]$:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-\frac{\pi}{2}\cdot x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)+2\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot a\right)-\frac{\pi}{2}\cdot a\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot a\right)+2=g(a)$$

[1] Si hay que probar que existe α tal que $f'(\alpha)=-2$, es decir, tal que $f'(\alpha)+2=0$, hay que considerar una función que se anule para $x=\alpha$. Esa función es $g(x)=f'(x)+2$.

JUNIO DE 2008. PROBLEMA D2.

Halla los puntos en que se cortan las funciones $f(x)=x^3-3x$ y $g(x)=2x^2$, y calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas. (3 Puntos)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^3-3x \\ y=2x^2 \end{cases} \Rightarrow x^3-3x=2x^2 \Rightarrow x^3-2x^2-3x=0 \Rightarrow x(x^2-2x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre -1 y 0 y entre 0 y 3 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
-1/2	11/8	1/2
1	-2	2

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-1}^{0}(x^3-3x-2x^2)\cdot dx+\int_{0}^{3}(2x^2-x^3+3x)\cdot dx =$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-3\cdot\frac{x^2}{2}-2\cdot\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{0}+\left(2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^2}{2}\right)_{0}^{3} =$$

$$=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)+\left(18-\frac{81}{4}+\frac{27}{2}\right)-0=\frac{7}{12}+\frac{45}{4}=\frac{71}{6}$$