JUNIO DE 2009. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+y-az=0 \\ -x+ay+az=2a+1 \\ x+y+(a^3-2a)z=a-1 \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & 0 \\ -1 & a & a & 2a+1 \\ 1 & 1 & a^3-2a & a-1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -a & 0 \\ 0 & \mathbf{a+1} & 0 & 2a+1 \\ 0 & 0 & \mathbf{a^3-a} & a-1 \end{array}\right) \overset{2}{\rightarrow} \begin{cases} a+1=0 \\ a(a^2-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=0,\ a=\pm 1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-1, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

2º) Si a=0, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

3º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro[3]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y+z=-3/2+z \\ y=3/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3/2+\alpha \\ y=3/2 \\ z=\alpha \end{cases}$$

4º) Si $a\neq 0$ y $a\neq\pm 1$, el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x+y-az=0 \\ (a+1)y=2a+1 \\ a(a-1)(a+1)z=a-1 \end{cases} \overset{4}{\Rightarrow} z=\frac{a-1}{a(a+1)(a-1)}=\frac{1}{a(a+1)} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{a^2+a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)y=2a+1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{2a+1}{a+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-y+az=-\frac{2a+1}{a+1}+\frac{a}{a(a+1)}=\frac{-2a-1}{a+1}+\frac{1}{a+1}=\frac{-2a-1+1}{a+1}=\frac{-2a}{a+1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{-2a}{a+1}}$$

---

1 2ªf+1ªf; 3ªf-1ªf.

2 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.

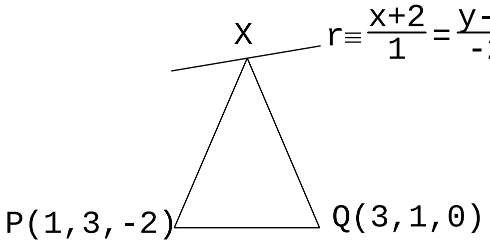
3 Ya que es un sistema con tres incógnitas y dos ecuaciones fundamentales.

4 Como ya se han estudiado los casos en los que se anulan los coeficientes de las incógnitas que vamos a despejar ahora, podemos hacer esto tranquilamente.

JUNIO DE 2009. PROBLEMA A2.

Encuentra el punto de la recta $r\equiv\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{1}$ que forma triángulo isósceles con los puntos P(1,3,-2) y Q(3,1,0). (2 PUNTOS)

PRIMER MÉTODO:



$$r\equiv\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=-2+\alpha\\ y=1-2\alpha\\ z=-2+\alpha\end{cases}$$

Sea X el punto de la recta que andamos buscando:

$$X(-2+\alpha,1-2\alpha,-2+\alpha)$$

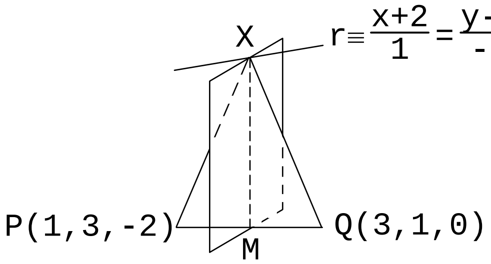
Como dicho punto equidista de P y Q[1]:

$$d(X,P)=d(X,Q)\Rightarrow\sqrt{(3-\alpha)^2+(2+2\alpha)^2+(-\alpha)^2}=\sqrt{(5-\alpha)^2+(2\alpha)^2+(2-\alpha)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9-6\alpha+\alpha^2+4+8\alpha+4\alpha^2+\alpha^2=25-10\alpha+\alpha^2+4\alpha^2+4-4\alpha+\alpha^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13+2\alpha=29-14\alpha\Rightarrow 16\alpha=16\Rightarrow\alpha=1\Rightarrow X(-1,-1,-1)$$

SEGUNDO MÉTODO:



$$r\equiv\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=-2+\alpha\\ y=1-2\alpha\\ z=-2+\alpha\end{cases}$$

Si M es el punto medio del segmento PQ: M(2,2,-1).

El plano mediador del segmento PQ (que está formado por todos los puntos que equidistan de P y Q) pasa por M y tiene por vector característico a $\vec{v}=[\overrightarrow{PQ}]=(2,-2,2)=2(1,-1,1)$. Por tanto, su ecuación es:

$$x-y+z+D=0\Rightarrow 2-2-1+D=0\Rightarrow D=1\Rightarrow x-y+z+1=0$$

Como el punto X está en este plano, satisface su ecuación:

$$-2+\alpha-1+2\alpha-2+\alpha+1=0\Rightarrow 4\alpha=4\Rightarrow\alpha=1\Rightarrow X(-1,-1,-1)$$

[1] Aunque hay una cierta ambigüedad en el enunciado, parece que los lados iguales del triángulo son XP y XQ.

JUNIO DE 2009. PROBLEMA B1.

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -7\\1 & -3\end{pmatrix}$, calcula A^3 y A^{38}. (2 PUNTOS)

Calculamos las primeras potencias de A:

- $A^1=\begin{pmatrix}2 & -7\\1 & -3\end{pmatrix}$.
- $A^2=\begin{pmatrix}2 & -7\\1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -7\\1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 7\\-1 & 2\end{pmatrix}$
- $A^3=\begin{pmatrix}2 & -7\\1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 7\\-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=I$

Por tanto:

$$A^{38}=A^{3\cdot 12+2}=(A^3)^{12}\cdot A^2=(I)^{12}\cdot A^2=I\cdot A^2=A^2=\begin{pmatrix}-3 & 7\\-1 & 2\end{pmatrix}$$

JUNIO DE 2009. PROBLEMA B2.

Halla la ecuación continua de la recta que es perpendicular[1] a las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x+3y-z+8=0\\x+4y-2z+12=0\end{cases}\quad \text{y}\quad s\equiv\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-5}{-2}$$

(3 PUNTOS)

Hallamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases}x+3y-z=-8\\x+4y-2z=-12\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&-8\\1&4&-2&-12\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&-8\\0&1&-1&-4\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}x+3y-z=-8\\y-z=-4\end{cases}\Rightarrow$$

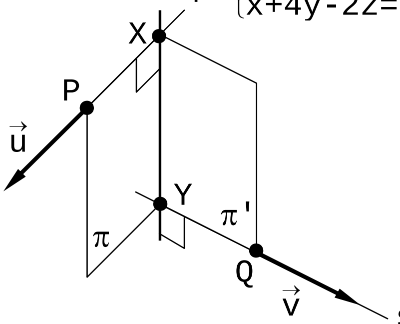
$$\Rightarrow\begin{cases}x=-8+12-3z+z\\y=-4+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4-2\alpha\\y=-4+\alpha\\z=\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P(4,-4,0)\\\vec{u}(-2,1,1)\end{cases}$$

A continuación se puede seguir uno de los siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Por estar el punto X en la recta r: $X(4-2\alpha,-4+\alpha,\alpha)$.

$$r\equiv\begin{cases}x+3y-z=-8\\x+4y-2z=-12\end{cases}$$



$$s\equiv\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-5}{-2}\rightarrow\begin{cases}x=\beta\\y=-2+\beta\\z=5-2\beta\end{cases}\rightarrow\begin{cases}Q(0,-2,5)\\\vec{v}(1,1,-2)\end{cases}$$

Por estar el punto Y en s: $Y(\beta,-2+\beta,5-2\beta)$.

Por tanto: $[\overrightarrow{XY}]=(\beta-4+2\alpha,2+\beta-\alpha,5-2\beta-\alpha)$.

Como $[\overrightarrow{XY}]$ es perpendicular[3] a $\vec{u}(-2,1,1)$ y a $\vec{v}(1,1,-2)$:

$$\begin{cases}[\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{u}=0\\[\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{v}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\beta+8-4\alpha+2+\beta-\alpha+5-2\beta-\alpha=0\\\beta-4+2\alpha+2+\beta-\alpha-10+4\beta+2\alpha=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\alpha-3\beta=-15\\3\alpha+6\beta=12\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta=5\\\alpha+2\beta=4\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&2&4\\2&1&5\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&4\\0&-3&-3\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta=4\\-3\beta=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2\\\beta=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}X(0,-2,2)\\Y(1,-1,3)\end{cases}\Rightarrow[\overrightarrow{XY}]=(1,1,1)\Rightarrow XY\equiv\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$$

---

[1] Debería decir “que corta perpendicularmente”.
[2] 2ªf-1ªf.
[3] Si en la resolución del sistema que sigue resulta que los puntos X e Y coinciden, eso significa que las rectas r y s se cortan en dicho punto. En ese caso, la recta buscada pasa por ese punto y tiene por vector direccional el producto vectorial de los vectores direccionales de las rectas r y s.
[4] 2ªf-2·1ªf.

SEGUNDO MÉTODO:

Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares a la recta que buscamos, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-3\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}=-3(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+4 & z \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3(y+4)-3z=0 \Rightarrow y+4-z=0 \Rightarrow y-z+4=0$$

Como Y está en la recta s[1]: $Y(\beta,-2+\beta,5-2\beta)$.

Como Y está en el plano π, satisface su ecuación:

$$-2+\beta-5+2\beta+4=0 \Rightarrow 3\beta=3 \Rightarrow \beta=1 \Rightarrow Y(1,-1,3)$$

Por tanto, la recta buscada es:

$$XY \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$$

[1] En lugar de lo que sigue, se podría calcular la ecuación del plano π'. La recta XY sería entonces la intersección de este plano y el plano π.

JUNIO DE 2009. PROBLEMA C1.

Halla las integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x-3} \quad y \quad \int \frac{dx}{x^2-2x+2}$$ (2 PUNTOS)

PRIMERA INTEGRAL:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A\cdot(x-3)+B\cdot(x+1)}{x^2-2x-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A\cdot(x-3)+B\cdot(x+1) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=-1 \Rightarrow 1=-4A \Rightarrow A=-1/4 \\ \text{Si } x=3 \Rightarrow 1=4B \Rightarrow B=1/4 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x-3}=\int \frac{-1/4}{x+1}\cdot dx+\int \frac{1/4}{x-3}\cdot dx=-\frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{x+1}\cdot dx+\frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{x-3}\cdot dx \overset{1}{=}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot \ln|x+1|+\frac{1}{4}\cdot \ln|x-3|+C$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{4}\cdot \ln|x+1|+\frac{1}{4}\cdot \ln|x-3|\right)'=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-3}=\frac{-x+3+x+1}{4(x+1)(x-3)}=\frac{1}{x^2-2x-3}$$

SEGUNDA INTEGRAL:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-2x+2=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} \Rightarrow \text{las raíces son complejas} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1^2 \Rightarrow \text{hacemos el cambio} \begin{cases} x-1=t \\ dx=dt \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+2}=\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}=\int \frac{dt}{t^2+1} \overset{2}{=} \operatorname{arc\,tg} t+C=\operatorname{arc\,tg}(x-1)+C$$

Comprobación:

$$[\operatorname{arc\,tg}(x-1)]'=\frac{1}{1+(x-1)^2}=\frac{1}{x^2-2x+2}$$

1 Las dos integrales son casi inmediatas de tipo logarítmico.
2 La integral es inmediata de tipo arco tangente.

Demuestra que la función $f(x=\ln(1+x\cdot \operatorname{sen} x)$ tiene un máximo relativo en $(\pi/2,\pi)$. Menciona los resultados teóricos que utilices. (3 PUNTOS)

1º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, se considera la función[1]:

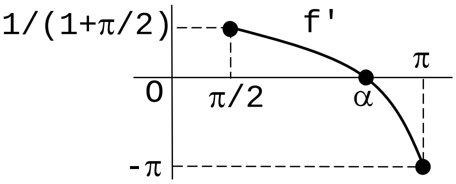
$$f'(x)=\frac{\operatorname{sen} x+x\cdot\cos x}{1+x\cdot\operatorname{sen} x}$$

2º) Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en $(\pi/2,\pi)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) $f'(\pi/2)\cdot f'(\pi)<0$:

- $f'(\pi/2)=1/(1+\pi/2)>0$.
- $f'(\pi)=-\pi/1=-\pi<0$.



2ª) f' es continua en $[\pi/2,\pi]$:

- $[\pi/2,\pi]\overset{2}{\subset}\mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)$:
- Si $a\in[\pi/2,\pi]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen} x+x\cdot\cos x}{1+x\cdot\operatorname{sen} x}=\frac{\operatorname{sen} a+a\cdot\cos a}{1+a\cdot\operatorname{sen} a}=f'(a)$$

3º) Ahora bien, como f es continua en α, por ser derivable en dicho punto, y f' es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de α, entonces, por el criterio de la variación del signo de la primera derivada, f tiene en dicho punto un máximo relativo.

* * *

NOTA:

$$\text{Si } \pi/2\le x\le\pi \Rightarrow \operatorname{sen} x\ge 0 \overset{3}{\Rightarrow} x\cdot\operatorname{sen} x\ge 0 \overset{4}{\Rightarrow} 1+x\cdot\operatorname{sen} x\ge 1 \Rightarrow 1+x\cdot\operatorname{sen} x>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ y } f' \text{ están definidas en } [\pi/2,\pi]$$

[1] Los dominios de f y f' no son fáciles de calcular. Aunque, evidentemente, coinciden, pues en ambos casos se requiere que $1+x\cdot\operatorname{sen} x$ sea positivo.

[2] La demostración de esta inclusión está en la nota al final del problema.

[3] Ya que x es positivo.

[4] Sumamos 1 a los dos miembros de la desigualdad.

JUNIO DE 2009. PROBLEMA D1.

Demuestra que la derivada de la función $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)}$ se anula en algún punto del intervalo $(0,\pi/2)$. Menciona los resultados teóricos que utilices. (2 PUNTOS)

Primero derivamos la función f:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)}}\cdot\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)\right]'=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)'=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)}{2\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)}}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\left(3^{\operatorname{sen} x}\right)'=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)}{2\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)}}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\cdot\ln 3\cdot\cos x=\frac{\pi\cdot\ln 3\cdot\cos x\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)}{8\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)}}$$

A continuación se puede seguir uno de los dos siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle, existe α en $(0,\pi/2)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

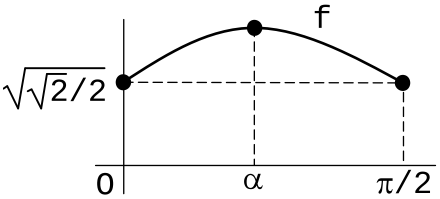
En efecto:

1ª) $f(0)=f(\pi/2)$:

- $f(0)=\sqrt{\operatorname{sen}(\pi/4)}=\sqrt{\sqrt{2}/2}$
- $f(\pi/2)=\sqrt{\operatorname{sen}(3\pi/4)}=\sqrt{\sqrt{2}/2}$

2ª) f es continua en $[0,\pi/2]$ por ser derivable[1] en R.

3ª) f es derivable en $(0,\pi/2)$ por serlo en R.



[1] Ver la nota al final del problema.

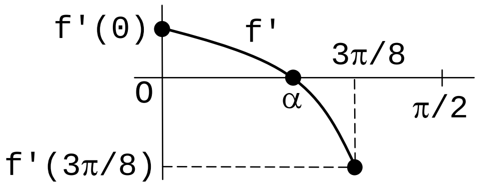
SEGUNDO MÉTODO:

Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en $(0,3\pi/8)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) $f'(0)\cdot f'(3\pi/8)<0$, ya que el signo de f' sólo depende del producto $\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)$, pues todos los demás factores son positivos:

- $\text{Signo}(f'(0))=+\cdot+=+$
- $f'(\pi/2)=0$
- $\text{Signo}(f'(3\pi/8))=+\cdot-=-$



2ª) f' es continua en $[0,3\pi/8]$:

- $[0,3\pi/8]\subset \text{Dom}(f')=\text{Dom}(f)\overset{1}{=}\mathbb{R}$
- Si $a\in[0,3\pi/8]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{\pi\cdot\ln 3\cdot\cos x\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)}{8\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\right)}}=$$

$$=\frac{\pi\cdot\ln 3\cdot\cos a\cdot 3^{\operatorname{sen} a}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} a}\right)}{8\cdot\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} a}\right)}}=f'(a)$$

NOTA:

$$-1\le\operatorname{sen} x\le 1 \overset{2}{\Rightarrow} 3^{-1}\le 3^{\operatorname{sen} x}\le 3^{1} \overset{3}{\Rightarrow} \frac{\pi}{12}\le\frac{\pi}{4}\cdot 3^{\operatorname{sen} x}\le\frac{3\pi}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{el radicando es positivo} \Rightarrow \text{Dom}(f')=\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$$

[1] La demostración de esta igualdad está en la nota al final del problema.

[2] La función exponencial $f(x)=3^x$ es creciente.

[3] Multiplicamos por $\pi/4$.

JUNIO DE 2009. PROBLEMA D2.

Sabemos que las funciones $f(x)=\pi x-x^2$ y $g(x)=\operatorname{sen} x$ se cortan sólo en dos puntos. Encuentra esos dos puntos y calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. (3 PUNTOS)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\pi x-x^2 \\ y=\operatorname{sen} x \end{cases} \Rightarrow \pi x-x^2=\operatorname{sen} x \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=0 \\ x=\pi \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre 0 y π qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
$\pi/2$	$\pi^2/2-\pi^2/4=\pi^2/4\simeq 2,5$	1

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_0^{\pi}(\pi x-x^2-\operatorname{sen} x)\cdot dx=\left(\pi\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cos x\right)_0^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{\pi^3}{2}-\frac{\pi^3}{3}+\cos\pi\right)-(0-0+\cos 0)=\frac{\pi^3}{6}-2=\frac{\pi^3-12}{6}$$

[1] Esta ecuación se resuelve a ojo.