## Junio de 2010. Problema A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a+1)x+y+z=-1\\(-a-1)x-2z=2\\y+(a^2-a-1)z=-a+2\end{cases}$$

(3 Puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a+1&1&1&-1\\-a-1&0&-2&2\\0&1&a^2-a-1&-a+2\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a+1&1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&1&a^2-a-1&-a+2\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{a+1}&1&1&-1\\0&\mathbf{1}&-1&1\\0&0&\mathbf{a^2-a}&-a+1\end{array}\right)\overset{3}{\to}$$

$$\to\begin{cases}a+1=0\ \Rightarrow\ a=-1\\a^2-a=0\ \Rightarrow\ a(a-1)=0\ \Rightarrow\ a=0,\ a=1\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

***1º)*** Si a=-1, el sistema es incompatible[4]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&2&2\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&-1\\0&0&-2&2\\0&0&2&2\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&-1\\0&0&-2&2\\0&0&0&4\end{array}\right)$$

***2º)*** Si a=0, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

***3º)*** Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&-1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\begin{cases}2x+y+z=-1\\y-z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=-1-y-z=-1-1-z-z\\y=1+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1-\alpha\\y=1+\alpha\\z=\alpha\end{cases}$$

***4º)*** Si a≠0 y a≠±1, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r}(a+1)x+y+z=-1\\y-z=1\\a(a-1)z=-(a-1)\end{array}\right\}\Rightarrow z=\frac{-(a-1)}{a(a-1)}=\frac{-1}{a}\Rightarrow\boxed{z=-1/a}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=1+z=1-1/a\Rightarrow\boxed{y=\frac{a-1}{a}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)x=-1-y-z=-1-\frac{a-1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{-a-a+1+1}{a}=\frac{-2a+2}{a}\Rightarrow\boxed{x=\frac{2-2a}{a^2+a}}$$

1 2ªf+1ªf.
2 3ªf-2ªf.
3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.
4 Observa que hay que seguir aplicando Gauss hasta obtener un sistema escalonado.
5 2ªf-1ªf.
6 3ªf+2ªf.

## JUNIO DE 2010. PROBLEMA A2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que está contenida en el plano $\pi\equiv x-2y+z-4=0$ y corta perpendicularmente a la recta:

$$r\equiv\begin{cases}x-y-z+1=0\\3x-y+z-3=0\end{cases}$$

(2 PUNTOS)

Hallamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases}x-y-z+1=0\\3x-y+z-3=0\end{cases}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\3&-1&1&3\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\0&2&4&6\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\0&1&2&3\end{array}\right)\to$$

$$\to\begin{cases}x-y-z=-1\\y+2z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1+y+z=-1+3-2z+z=2-z\\y=3-2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2-\alpha\\y=3-2\alpha\\z=\alpha\end{cases}\to\begin{cases}P(2,3,0)\\\vec{u}(-1,-2,1)\end{cases}$$

Sea X el punto de corte de las dos rectas. Por estar en la recta r, $X(2-\alpha,3-2\alpha,\alpha)$. Y como la recta buscada está en $\pi$, X también[3]:

$$2-\alpha-2(3-2\alpha)+\alpha-4=0\Rightarrow 2-\alpha-6+4\alpha+\alpha-4=0\Rightarrow 4\alpha=8\Rightarrow\alpha=2\Rightarrow X(0,-1,2)$$

A continuación puede seguirse uno de los tres[4] siguientes métodos:

### PRIMER MÉTODO:

Como el vector direccional de r, $\vec{u}(-1,-2,1)$, y el vector característico del plano $\pi$, $\vec{v}(1,-2,1)$, son ambos perpendiculares a la recta buscada, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&-2&1\\1&-2&1\end{vmatrix}=(0,2,4)=2(0,1,2)$$

Luego la ecuación continua de la recta buscada es:

$$\frac{x}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2}$$

### SEGUNDO MÉTODO:

Como la recta buscada es perpendicular a r, está en el plano perpendicular a r que pasa por X. Como $\vec{u}(-1,-2,1)$ es un vector direccional de r, dicho plano es $-x-2y+z+D=0$. Y como pasa por $X(0,-1,2)$:

$$-0+2+2+D=0\Rightarrow D=-4\Rightarrow -x-2y+z-4=0\Rightarrow x+2y-z+4=0$$

La ecuación de la recta buscada es:

$$\begin{cases}x-2y+z-4=0\\x+2y-z+4=0\end{cases}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&4\\1&2&-1&-4\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&4\\0&4&-2&-8\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&4\\0&2&-1&-4\end{array}\right)\to$$

$$\to\begin{cases}x-2y+z=4\\2y-z=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4+2y-z=4+2y-4-2y=0\\z=4+2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=\alpha\\z=4+2\alpha\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{2}$$

---

1 2ªf-3·1ªf.
2 2ªf·1/2.
3 Dicho de otro modo, X es la intersección de r y $\pi$.
4 El cuarto método no requiere de los cálculos anteriores.
5 2ªf-1ªf.

**TERCER MÉTODO:**

Calculamos las ecuaciones paramétricas del plano $\pi$:

$$x-2y+z-4=0 \Rightarrow x=4+2y-z \Rightarrow \begin{cases} x=4+2\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

Como los puntos de la recta buscada están en el plano $\pi$, son de la forma $Y(4+2\alpha-\beta,\alpha,\beta)$. Y como $X(0,-1,2)$: $[\overrightarrow{XY}]=(-4-2\alpha+\beta,-1-\alpha,2-\beta)$.

Como la recta r y la recta buscada se cortan perpendicularmente:

$$[\overrightarrow{XY}]\perp\vec{u} \Rightarrow [\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow 4+2\alpha-\beta+2+2\alpha+2-\beta=0 \Rightarrow 2\beta=8+4\alpha \Rightarrow \beta=4+2\alpha$$

Sustituyendo arriba, queda:

$$\begin{cases} x=4+2\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4+2\alpha-4-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=4+2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=4+2\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{2}$$

**CUARTO MÉTODO:**

La ecuación de la recta buscada es[1]:

$$\begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ a(x-y-z+1)+b(3x-y+z-3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=4 \\ (a+3b)x+(-a-b)y+(-a+b)z=-a+3b \end{cases}$$

Un vector direccional de esta recta es:

$$\vec{x}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ a+3b & -a-b & -a+b \end{vmatrix}=(2a-2b+a+b,a-b+a+3b,-a-b+2a+6b)=$$

$$=(3a-b,2a+2b,a+5b)$$

Un vector direccional de r es:

$$\vec{y}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(-2,-4,2)=-2(1,2,-1)$$

Como las rectas son perpendiculares:

$$(3a-b,2a+2b,a+5b)\cdot(1,2,-1)=0 \Rightarrow 3a-b+4a+4b-a-5b=0 \Rightarrow 6a-2b=0 \Rightarrow b=3a$$

Por tanto:

$$\begin{cases} x-2y+z=4 \\ (a+3b)x+(-a-b)y+(-a+b)z=-a+3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=4 \\ 10x-4y+2z=8 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{\sim}{2}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x-2y+z=4 \\ 4x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=4+2y \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=4+2\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{2}$$

[1] Ya que, al cortar a r, se encuentra también en uno de los planos del haz de arista r.
[2] 2ªf-1ªf.

## Junio de 2010. Problema A3.

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sen}x)}{(x-\frac{\pi}{2})^2} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}) \qquad \text{(2 Puntos)}$$

### Primer límite:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sen}x\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} \overset{1}{=} \lim_{x\to\pi/2} \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sen}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos x}{2\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sen}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}\right) \overset{2}{=} \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sen}x\right)\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{x-\pi/2} =$$

$$= \frac{-\pi}{4}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{x-\pi/2} \overset{1}{=} \frac{-\pi}{4}\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\operatorname{sen}x}{1} = \frac{-\pi}{4}\cdot(-1) = \frac{\pi}{4}$$

### Segundo límite:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}) \overset{3}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x})\cdot(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} \overset{4}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{0+1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}$$

---

1 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.

2 El límite de un producto es el producto de los límites de los factores. La descomposición en dos límites, el primero de los cuales es determinado, simplifica la posterior aplicación de L'Hôpital al otro.

3 Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

4 Sacamos x factor común en el numerador y en el denominador.

## JUNIO DE 2010. PROBLEMA A4.

Dada la función $f(x)=\sqrt{\ln(3^x+x)+\ln(x^2-10x+20)}$ demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 PUNTOS)

Primero derivamos la función[1]:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\ln(3^x+x)+\ln(x^2-10x+20)}}\cdot[\ln(3^x+x)+\ln(x^2-10x+20)]'=$$

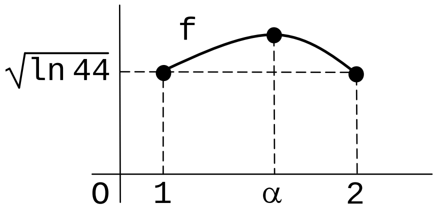
$$=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\ln(3^x+x)+\ln(x^2-10x+20)}}\cdot\left(\frac{3^x\cdot\ln 3+1}{3^x+x}+\frac{2x-10}{x^2-10x+20}\right)$$

A continuación puede seguirse uno de los dos métodos siguientes:

### PRIMER MÉTODO:

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle, existe $\alpha$ en $(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:




**1ª)** $f(1)=f(2)$:

- $f(1)=\sqrt{\ln 4+\ln 11}=\sqrt{\ln 44}$
- $f(2)=\sqrt{\ln 11+\ln 4}=\sqrt{\ln 44}$

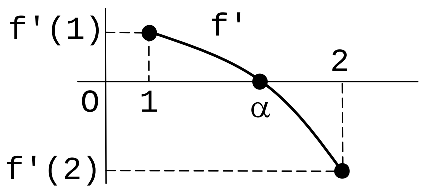
**2ª)** f es continua en $[1,2]$ por ser derivable[2] en $[1,2]$.

**3ª)** f es derivable en $(1,2)$ por serlo en $[1,2]$.

### SEGUNDO MÉTODO:

Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe $\alpha$ en $(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:




**1ª)** $f'(1)\cdot f'(2)<0$:

- $f'(1)\simeq 0,089$.
- $f'(2)\simeq -0,13$.

**2ª)** f' es continua en $[1,2]$:

- $[1,2]\overset{2}{\subset}\mathrm{Dom}(f')\overset{3}{\subset}\mathrm{Dom}(f)$.
- Si $a\in[1,2]$:

$$\lim_{x\to a}f'(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{2\cdot\sqrt{\ln(3^x+x)+\ln(x^2-10x+20)}}\cdot\left(\frac{3^x\cdot\ln 3+1}{3^x+x}+\frac{2x-10}{x^2-10x+20}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\ln(3^a+a)+\ln(a^2-10a+20)}}\cdot\left(\frac{3^a\cdot\ln 3+1}{3^a+a}+\frac{2a-10}{a^2-10a+20}\right)=f'(a)$$

1 Los dominios de f y f' no son fáciles de calcular.

2 Ver la nota que aparece al final.

3 Esta propiedad siempre es cierta.

**NOTA:**

- $1\leq x\leq 2 \overset{1}{\Rightarrow} 3^1\leq 3^x\leq 3^2 \Rightarrow 3\leq 3^x\leq 9 \overset{2}{\Rightarrow} 4\leq 3^x+x\leq 11 \overset{3}{\Rightarrow} \ln 4\leq \ln(3^x+x)\leq \ln 11.$
- $1\leq x\leq 2 \overset{4}{\Rightarrow} \begin{cases} 1^2\leq x^2\leq 2^2 \Rightarrow 1\leq x^2\leq 4 \\ 10\leq 10x\leq 20 \overset{5}{\Rightarrow} -20\leq -10x\leq -10 \overset{6}{\Rightarrow} 0\leq -10x+20\leq 10 \end{cases} \overset{7}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow 1\leq x^2-10x+20\leq 14 \overset{3}{\Rightarrow} \ln 1\leq \ln(x^2-10x+20)\leq \ln 14$$

- Sumando miembro a miembro las dos desigualdades obtenidas en los dos puntos anteriores, queda:

$$\ln 4\leq \ln(3^x+x)+\ln(x^2-10x+20)\leq \ln 154$$

Y como $1<\ln 4$, es evidente que $[1,2]\subset Dom(f')\subset Dom(f)$.

---

[1] La función exponencial $f(x)=3^x$ es creciente.

[2] Sumamos miembro a miembro $1\leq x\leq 2$ y $3\leq 3^x\leq 9$.

[3] La función ln es creciente.

[4] Por un lado, la función $f(x)=x^2$ es creciente si $x>0$; por otro lado, multiplicamos a los miembros de la inecuación por 10.

[5] Multiplicamos a los miembros de la inecuación por -1.

[6] Sumamos 20 a los miembros de la inecuación.

[7] Sumamos miembro a miembro estas dos inecuaciones.

## JUNIO DE 2010. PROBLEMA B1.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, encuentra la matriz X tal que $A\cdot X\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

(2 PUNTOS)

Calculamos las inversas de las matrices A y B:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\to A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\to B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Por tanto[5]:

$$A\cdot X\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow X=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -8\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

1 2ªf+1ªf.

2 1ªf+2ªf.

3 1ªf↔2ªf.

4 2ªf-2·1ªf.

5 Las inversas de A y B también se podían haber obtenido mediante determinantes.

## JUNIO DE 2010. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(1,1,1) y corta a las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x+y+z-1=0\\2x+2y+z=0\end{cases}\quad \text{y}\quad s\equiv\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$$

(3 PUNTOS)

Calculamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r:

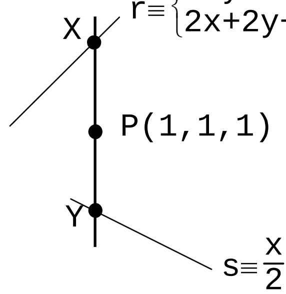
$$\begin{cases}x+y+z-1=0\\2x+2y+z=0\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&2&1&0\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&-1&-2\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}x+y+z=1\\z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1-\alpha\\y=\alpha\\z=2\end{cases}$$

A continuación se puede seguir uno de los siguientes métodos:

### *PRIMER MÉTODO:*

Consiste en hallar un vector direccional de la recta XY.

Por estar el punto X en la recta r: X($-1-\alpha,\alpha,2$).




$$r\equiv\begin{cases}x+y+z-1=0\\2x+2y+z=0\end{cases}$$

$$s\equiv\frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}\rightarrow\begin{cases}x=2\beta\\y=2+\beta\\z=-1+\beta\end{cases}$$

Por estar el punto Y en la recta s: Y($2\beta,2+\beta,-1+\beta$).

Como $[\overrightarrow{PX}]=(-2-\alpha,\alpha-1,1)$ y $[\overrightarrow{PY}]=(2\beta-1,1+\beta,-2+\beta)$ son colineales:

$$\frac{-2-\alpha}{2\beta-1}=\frac{\alpha-1}{1+\beta}=\frac{1}{-2+\beta}\Rightarrow\begin{cases}-2-2\beta-\alpha-\alpha\beta=2\alpha\beta-2\beta-\alpha+1\\-2\alpha+\alpha\beta+2-\beta=1+\beta\\4-2\beta+2\alpha-\alpha\beta=2\beta-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\alpha\beta=-3\\\alpha\beta-2\alpha-2\beta=-1\\\alpha\beta-2\alpha+4\beta=5\end{cases}\overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha\beta-2\alpha-2\beta=-1\\6\beta=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha-2\alpha-2=-1\\\beta=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=1\end{cases}$$

Como estos valores satisfacen la primera ecuación: $3\cdot(-1)\cdot1=-3$, el problema tiene solución[3].

Como $[\overrightarrow{PY}]$ es vector direccional de la recta buscada:

$$\beta=1\Rightarrow[\overrightarrow{PY}]=(1,2,-1)\Rightarrow XY\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

---

1 2ªf-2·1ªf.

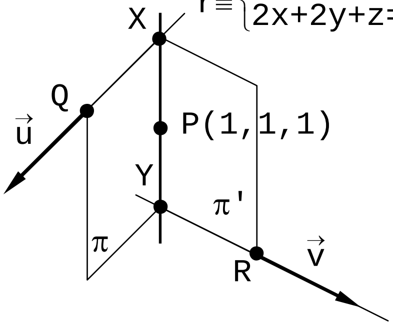
2 Resolvemos el sistema formado por las dos últimas ecuaciones. Para ello, resto a la tercera la segunda.

3 Un problema de esta naturaleza no siempre tiene solución. La ventaja de este primer método es que si el sistema que hemos resuelto es compatible, el problema tiene solución; y si es incompatible, no la tiene. La desventaja del segundo método, que se ve a continuación, es que se obtiene solución incluso cuando no la hay. Pero como en el examen de Selectividad es improbable que pongan un problema sin solución, puede utilizarse tranquilamente también el segundo método (y, por tanto, si se utiliza el primero y el sistema nos sale incompatible, es casi seguro que nos hemos equivocado en algo).

***Segundo método:***

Este método consiste en hallar los planos $\pi$ y $\pi'$, cuya intersección es la recta XY.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x+2y+z=0 \end{cases}$$




$$s \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1} \rightarrow \begin{cases} R(0,2,-1) \\ \vec{v}(2,1,1) \end{cases}$$

El calculo[1] de las ecuaciones paramétricas de la recta r permite hallar un punto, Q(-1,0,2), y un vector direccional, $\vec{u}(-1,1,0)$.

Como $P \notin r$, ya que no satisface su ecuación, P y r determinan un plano: el plano $\pi$. Y como $[\overrightarrow{PQ}]=(-2,-1,1)$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-1+y-1+3(z-1)=0 \Rightarrow x+y+3z=5$$

Como[2] $P \notin s$, ya que no satisface su ecuación, P y s determinan un plano: el plano $\pi'$. Y como $[\overrightarrow{PR}]=(-1,1,-2)$:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-1)-3(y-1)-3(z-1)=0 \Rightarrow 3x-3y-3z+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-y-z+1=0$$

Por tanto, la ecuación de la recta XY es:

$$\begin{cases} x+y+3z=5 \\ x-y-z=-1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x+y+3z=5 \\ y+2z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5-y-3z=5-3+2z-3z \\ y=3-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\alpha \\ y=3-2\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow XY \equiv \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$$

[1] Otra forma de obtener la ecuación del plano $\pi$ consiste en utilizar el hecho de que dicho plano contiene a la recta r y, por tanto, su ecuación es: $\pi \equiv \alpha(x+y+z-1)+\beta(2x+2y+z)=0$. Como $P \in \pi \Rightarrow 2\alpha+5\beta=0 \Rightarrow \alpha=-5\beta/2 \Rightarrow \pi \equiv (-5\beta/2)(x+y+z-1)+\beta(2x+2y+z)=0 \Rightarrow \pi \equiv -5(x+y+z-1)+2(2x+2y+z)=0 \Rightarrow$ $\pi \equiv x+y+3z=5$.

[2] Otra forma de continuar el problema consiste en hallar el punto Y, que es la intersección de la recta s y el plano $\pi$.

[3] 2ªf-1ªf.

[4] 2ªf·(-1/2).

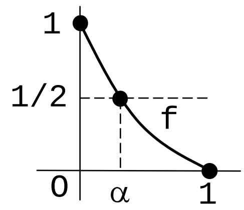
## JUNIO DE 2010. PROBLEMA B3.

Demuestra que la función $f(x)=\sqrt{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot 2^x)}$ vale 1/2 en algún punto del intervalo (0,1). Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 Puntos)

**PRIMER MÉTODO:**

Como la función f cumple las condiciones de la propiedad de Darboux, existe $\alpha$ en (0,1) tal que $f(\alpha)=1/2$.

En efecto:




**1ª)** $f(0)>1/2>f(1)$:

- $f(0)=1$.
- $f(1)=0$.

**2ª)** f es continua en [0,1]:

- $[0,1]\overset{2}{\subset}\operatorname{Dom}(f)$.
- Si $a\in[0,1]$:

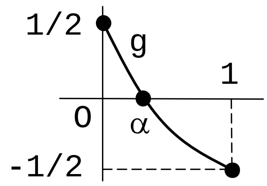
$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^x\right)}=\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^a\right)}=f(a)$$

**SEGUNDO MÉTODO:**

Como la función[1] $g(x)=f(x)-1/2$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano, existe $\alpha$ en (0,1) tal que $g(\alpha)=0$. Ahora bien:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow f(\alpha)-1/2=0 \Rightarrow f(\alpha)=1/2$$

En efecto:




**1ª)** $g(0)\cdot g(1)<0$:

- $g(0)=1-1/2=1/2>0$
- $g(1)=0-1/2=-1/2<0$

**2ª)** g es continua en [0,1]:

- $[0,1]\overset{2}{\subset}\operatorname{Dom}(g)=\operatorname{Dom}(f)$.
- Si $a\in[0,1]$:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\left[\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^x\right)}-\frac{1}{2}\right]=\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^a\right)}-\frac{1}{2}=g(a)$$

**NOTA:**

$$0\le x\le 1 \overset{3}{\Rightarrow} 2^0\le 2^x\le 2^1 \Rightarrow 1\le 2^x\le 2 \overset{4}{\Rightarrow} \frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{2}\cdot 2^x\le\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^x\right)\ge 0$$

---

[1] Si hay que probar que existe $\alpha$ tal que $f(\alpha)=1/2$, es decir, tal que $f(\alpha)-1/2=0$, hay que considerar una función que se anule en $x=\alpha$. Esa función es $g(x)=f(x)-1/2$. Los dominios de las funciones f y g, que coinciden, son difíciles de calcular.

[2] La demostración de esta inclusión esta en la nota final.

[3] La función exponencial $f(x)=2^x$ es creciente.

[4] Multiplico por $\pi/2$ a cada miembro de la desigualdad.

## JUNIO DE 2010. PROBLEMA B4.

Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las siguientes funciones:

$f(x)=5-x$ y $g(x)=\frac{5}{x+1}$ (3 PUNTOS)

**1º)** Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=5-x \\ y=\frac{5}{x+1} \end{cases} \Rightarrow 5-x=\frac{5}{x+1} \Rightarrow 5x+5-x^2-x=5 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

**2º)** Averiguamos entre 0 y 4 qué función está por encima y qué función está por debajo:

| x | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 5/3 |

**3º)** Calculamos el área:

$$A=\int_0^4 \left(5-x-\frac{5}{x+1}\right)\cdot dx=\left(5x-\frac{x^2}{2}-5\cdot \ln|x+1|\right)_0^4=$$

$$=(20-8-5\cdot \ln 5)-(0-0-5\cdot \ln 1)=12-5\cdot \ln 5$$