Junio de 2011. Problema A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2y+a^2z=a+4 \\ ax-y+(a+2)z=1 \\ ax-2y+az=0 \end{cases}$$ (3 Puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & a^2 & a+4 \\ a & -1 & a+2 & 1 \\ a & -2 & a & 0 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & a & 0 \\ a & -1 & a+2 & 1 \\ 0 & 2 & a^2 & a+4 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & a^2 & a+4 \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{a} & -2 & a & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{a^2-4} & a+2 \end{array}\right) \overset{4}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=0, el sistema es incompatible[5]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{7}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{8}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

2º) Si a=2, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

3º) Si a=-2, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{9}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z=-1+2z-z \\ y=1-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

4º) Si a≠0 y a≠±2, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} ax-2y+az=0 \\ y+2z=1 \\ (a^2-4)z=a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{a+2}{a^2-4}=\frac{a+2}{(a+2)(a-2)} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{a-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=1-2z=1-\frac{2}{a-2}=\frac{a-2-2}{a-2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{a-4}{a-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax=2y-az=\frac{2a-8}{a-2}-\frac{a}{a-2}=\frac{2a-8-a}{a-2}=\frac{a-8}{a-2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a-8}{a^2-2a}}$$

---

1 1ªf↔3ªf.
2 2ªf-1ªf.
3 3ªf-2·2ªf.
4 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.
5 Observa que hay que seguir aplicando Gauss hasta obtener un sistema escalonado.
6 1ªf↔2ªf.
7 2ªf+2·1ªf.
8 3ªf+2ªf.
9 1ªf·(-1/2).

Junio de 2011. Problema A2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que está contenida en el plano $\pi\equiv x+2y-z+2=0$ y corta perpendicularmente a la recta:

$$r\equiv\begin{cases}2x+y-z+1=0\\ x+2y-2z-1=0\end{cases}$$

(2 Puntos)

Hallamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases}2x+y-z=-1\\ x+2y-2z=1\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&-1\\1&2&-2&1\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&1\\2&1&-1&-1\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&1\\0&-3&3&-3\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&1\\0&1&-1&1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}x+2y-2z=1\\ y-z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-2y+2z=1-2-2z+2z=-1\\ y=1+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=1+\alpha\\ z=\alpha\end{cases}\rightarrow\begin{cases}P(-1,1,0)\\ \vec{u}(0,1,1)\end{cases}$$

Sea X el punto de corte de las dos rectas. Por estar en la recta r, $X(-1,1+\alpha,\alpha)$. Y como la recta buscada está en π, X también[4]:

$$-1+2(1+\alpha)-\alpha+2=0\Rightarrow -1+2+2\alpha-\alpha+2=0\Rightarrow\alpha=-3\Rightarrow X(-1,-2,-3)$$

A continuación puede seguirse uno de los tres[5] siguientes métodos:

Primer método:

Como el vector direccional de r, $\vec{u}(0,1,1)$, y el vector característico del plano π, $\vec{v}(1,2,-1)$, son ambos perpendiculares a la recta buscada, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=-(3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$$

Luego la ecuación continua de la recta buscada es:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{1}$$

Segundo método:

Como la recta buscada es perpendicular a r, está en el plano perpendicular a r que pasa por X. Como $\vec{u}(0,1,1)$ es un vector direccional de r, dicho plano es $y+z+D=0$. Y como pasa por $X(-1,-2,-3)$:

$$-2-3+D=0\Rightarrow D=5\Rightarrow y+z+5=0$$

La ecuación de la recta buscada es:

$$\begin{cases}x+2y-z+2=0\\ y+z+5=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=-2-2y+z=-2+10+2z+z\\ y=-5-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=8+3\alpha\\ y=-5-\alpha\\ z=\alpha\end{cases}\Rightarrow\frac{x-8}{3}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z}{1}$$

---

1 $1^a f\leftrightarrow 2^a f$.
2 $2^a f-2\cdot 1^a f$.
3 $2^a f\cdot(-1/3)$.
4 Dicho de otro modo, X es la intersección de r y π.
5 El cuarto método no requiere de los cálculos anteriores.

TERCER MÉTODO:

Calculamos las ecuaciones paramétricas del plano π:

$$x+2y-z+2=0 \Rightarrow x=-2-2y+z \Rightarrow \begin{cases} x=-2-2\alpha+\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

Como los puntos de la recta buscada están en dicho plano, son de la forma $Y(-2-2\alpha+\beta,\alpha,\beta)$. Por tanto, $[\overrightarrow{XY}]=(-1-2\alpha+\beta,2+\alpha,3+\beta)$.

Como la recta r y la recta buscada se cortan perpendicularmente:

$$[\overrightarrow{XY}]\perp\vec{u} \Rightarrow [\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow 2+\alpha+3+\beta=0 \Rightarrow \beta=-5-\alpha$$

Sustituyendo arriba, queda:

$$\begin{cases} x=-2-2\alpha+\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2-2\alpha-5-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-5-\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-7-3\alpha \\ y=\alpha \\ z=-5-\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x+7}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{-1}$$

CUARTO MÉTODO:

La ecuación de la recta buscada es[1]:

$$\begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ a(2x+y-z+1)+b(x+2y-2z-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-2 \\ (2a+b)x+(a+2b)y+(-a-2b)z=-a+b \end{cases}$$

Un vector direccional de esta recta es:

$$\vec{x}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2a+b & a+2b & -a-2b \end{vmatrix}=(-2a-4b+a+2b,a+2b-2a-b,a+2b-4a-2b)=$$

$$=(-a-2b,-a+b,-3a)$$

Un vector direccional de r es:

$$\vec{y}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=(0,3,3)$$

Como las rectas son perpendiculares:

$$(-a-2b,-a+b,-3a)\cdot(0,3,3)=0 \Rightarrow \Rightarrow -3a+3b-9a=0 \Rightarrow 3b=12a \Rightarrow b=4a$$

Por tanto:

$$\begin{cases} x+2y-z=-2 \\ (2a+b)x+(a+2b)y+(-a-2b)z=-a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-2 \\ 6ax+9ay-9az=3a \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 6a & 9a & -9a & 3a \end{array}\right)\sim$$

$$\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \to \begin{cases} x=-2-2y+z \\ y=-5-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8+3\alpha \\ y=-5-\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x-8}{3}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z}{1}$$

---

[1] Ya que, al cortar a r, se encuentra también en uno de los planos del haz de arista r.

[2] 2ªf·1/(3a), ya que a≠0.

[3] 2ªf-2·1ªf.

Junio de 2011. Problema A3.

Halla las integrales indefinidas:

$$\int \frac{tg^3x+tg\,x}{tg^2x-1}\cdot dx \qquad y \qquad \int \frac{dx}{x^2+x-2}$$ (2 Puntos)

Primera integral:

Como $(tg^2x-1)'=2\cdot tg\,x\cdot(1+tg^2x)=2\cdot(tg\,x+tg^3x)$, se trata de una integral casi inmediata de tipo logarítmico[1]:

$$\int \frac{tg^3x+tg\,x}{tg^2x-1}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int \frac{2\cdot(tg^3x+tg\,x)}{tg^2x-1}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot \ln|tg^2x-1|+C$$

Comprobación:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot \ln|tg^2x-1|\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(tg^2x-1)'}{tg^2x-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot tg\,x\cdot(1+tg^2x)}{tg^2x-1}=\frac{tg\,x+tg^3x}{tg^2x-1}$$

Segunda integral:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A\cdot(x-1)+B\cdot(x+2)}{x^2-2x-3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A\cdot(x-1)+B\cdot(x+2)\Rightarrow \begin{cases} Si\ \ x=-2 \Rightarrow 1=-3A \Rightarrow A=-1/3 \\ Si\ \ x=1 \Rightarrow 1=3B \Rightarrow B=1/3 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2}=\int\frac{-1/3}{x+2}\cdot dx+\int\frac{1/3}{x-1}\cdot dx=-\frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{x+2}\cdot dx+\frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{x-1}\cdot dx\overset{2}{=}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot \ln|x+2|+\frac{1}{3}\cdot \ln|x-1|+C$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{3}\cdot \ln|x+2|+\frac{1}{3}\cdot \ln|x-1|\right)'=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{-x+1+x+2}{3(x+2)(x-1)}=\frac{1}{x^2+x-2}$$

---

[1] También puede hacerse mediante el cambio de variable $tg^2x-1=t$. O con el cambio $tg\,x=t$, pero, en este caso, resulta un poco largo pues aparece una integral racional.

[2] Las dos integrales son casi inmediatas de tipo logarítmico.

Junio de 2011. Problema A4.

Dada la función $f(x)=\sqrt{2+\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x+1})+\operatorname{sen}\left(\pi-\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\right)}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 Puntos)

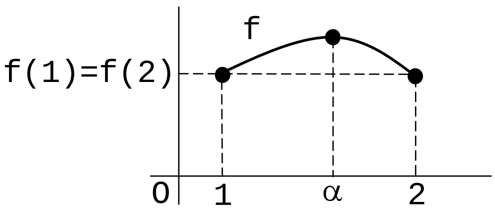
Como $\operatorname{sen}(\pi-a)=\operatorname{sen} a$, se puede simplificar algo la función:

- $f(x)=\sqrt{2+\operatorname{sen}\sqrt[3]{x+1}+\operatorname{sen}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}$
- $\operatorname{Dom}(f)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, ya que el radicando no es negativo pues la suma de ambos senos es mayor o igual que -2 (recuerda que el seno de un ángulo está entre -1 y 1).

* * *

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle[1], existe α en (1,2) tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:



1ª) $f(1)=f(2)$:

- $f(1)=\sqrt{2+\operatorname{sen}\sqrt[3]{2}+\operatorname{sen}\sqrt[3]{3}}$
- $f(2)=\sqrt{2+\operatorname{sen}\sqrt[3]{3}+\operatorname{sen}\sqrt[3]{2}}$

2ª) f es continua en [1,2] por ser derivable[2] en [1,2].

3ª) f es derivable en (1,2) por serlo en [1,2].

Nota:

$$f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{2+\operatorname{sen}\sqrt[3]{x+1}+\operatorname{sen}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}}\cdot\left(2+\operatorname{sen}\sqrt[3]{x+1}+\operatorname{sen}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\right)'=$$

$$=\frac{\cos\sqrt[3]{x+1}\cdot[(x+1)^{1/3}]'+\cos\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\cdot\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/3}\right]'}{2\cdot\sqrt{2+\operatorname{sen}\sqrt[3]{x+1}+\operatorname{sen}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}}=$$

$$=\frac{\cos\sqrt[3]{x+1}\cdot\frac{1}{3}\cdot(x+1)^{-2/3}+\cos\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-2/3}\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)'}{2\cdot\sqrt{2+\operatorname{sen}\sqrt[3]{x+1}+\operatorname{sen}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}}}=$$

---

[1] Podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones del teorema de Bolzano, pero resulta más complicado.

[2] Ver la nota que aparece a continuación.

$$=\frac{\dfrac{\cos\sqrt[3]{x+1}}{3\cdot(x+1)^{2/3}}+\dfrac{\cos\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}}\cdot\left(\dfrac{-2}{x^2}\right)}{3\cdot\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2/3}}}{2\cdot\sqrt{2+\mathrm{sen}\sqrt[3]{x+1}+\mathrm{sen}\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}}}}=\frac{\dfrac{\cos\sqrt[3]{x+1}}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}-\dfrac{2\cdot\cos\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}}}{3x^2\cdot\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^2}}}{2\cdot\sqrt{2+\mathrm{sen}\sqrt[3]{x+1}+\mathrm{sen}\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}}}}$$

Por anularse algún denominador, los números 0, -1 y -2 no pertenecen al dominio de f'. Pero ninguno de ellos afecta al intervalo que estamos estudiando.

Por otro lado, hay que ver qué sucede en dicho intervalo con la raíz del denominador:

- $1\le x\le 2 \overset{1}{\Rightarrow} 2\le x+1\le 3 \overset{2}{\Rightarrow} \sqrt[3]{2}\le\sqrt[3]{x+1}\le\sqrt[3]{3} \overset{3}{\Rightarrow} \sqrt[3]{x+1}\in(0,\pi/2) \overset{4}{\Rightarrow} \mathrm{sen}\sqrt[3]{x+1}>0.$
- $1\le x\le 2 \overset{5}{\Rightarrow} 1/2\le 1/x\le 1 \overset{6}{\Rightarrow} 1\le 2/x\le 2 \overset{1}{\Rightarrow} 2\le 1+2/x\le 3 \overset{2}{\Rightarrow} \sqrt[3]{2}\le\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}}\le\sqrt[3]{3} \Rightarrow$

$$\overset{3}{\Rightarrow} \sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}\in(0,\pi/2) \overset{4}{\Rightarrow} \mathrm{sen}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}>0$$

Por tanto, $[1,2]\subset \mathrm{Dom}(f')$.

---

[1] Sumo 1 a cada miembro de la desigualdad.

[2] La función $f(x)=\sqrt[3]{x}$ es creciente.

[3] Aproximadamente: $\sqrt[3]{2}=1{,}26$ rad, $\sqrt[3]{3}=1{,}44$ rad y $\pi/2=1{,}57$ rad.

[4] El seno de los ángulos del primer cuadrante es positivo.

[5] Si un número está entre 1 y 2, su inverso está entre 1/2 y 1.

[6] Multiplico por 2 a cada miembro de la desigualdad.

JUNIO DE 2011. PROBLEMA B1.

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices G que cumplan AG=GA.

(2 puntos)

Evidentemente, G es una matriz cuadrada de orden 2:

$$G=\begin{pmatrix}x & z\\y & t\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A\cdot G=G\cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & z\\y & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & z\\y & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x & z\\2y & 2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 2z\\y & 2t\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=x\\2y=y\\z=2z\\2t=2t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0\cdot x=0\\y=0\\z=0\\0\cdot t=0\end{cases} \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases}x=\alpha\\y=0\\z=0\\t=\beta\end{cases} \Rightarrow G=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & 2\beta\end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & 2\beta\end{pmatrix}$$

[1] Las ecuaciones primera y cuarta son triviales: x y t pueden tomar cualquier valor.

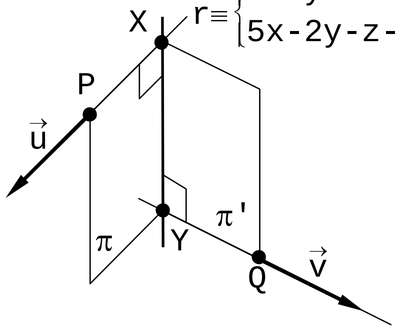
JUNIO DE 2011. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}3x-y-z+2=0\\5x-2y-z-1=0\end{cases}\quad \text{y}\quad s\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$$ (3 PUNTOS)

Hallamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$r\equiv\begin{cases}3x-y-z+2=0\\5x-2y-z-1=0\end{cases}$$



$$s\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}\rightarrow\begin{cases}Q(1,-1,0)\\\vec{v}(2,1,-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x-y-z=-2\\5x-2y-z=1\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&-1&-2\\5&-2&-1&1\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&-1&-2\\2&-1&0&3\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}3x-y-z=-2\\2x-y=3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=2+3x-y=2+3x+3-2x\\y=-3+2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=-3+2\alpha\\z=5+\alpha\end{cases}\rightarrow\begin{cases}P(0,-3,5)\\\vec{u}(1,2,1)\end{cases}$$

A continuación puede seguirse uno de los dos siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Por estar el punto X en la recta r: $X(\alpha,-3+2\alpha,5+\alpha)$.

Por estar el punto Y en la recta s: $Y(1+2\beta,-1+\beta,-\beta)$.

Por tanto: $[\overrightarrow{XY}]=(1+2\beta-\alpha,2+\beta-2\alpha,-5-\beta-\alpha)$.

Como $[\overrightarrow{XY}]$ es perpendicular a $\vec{u}(1,2,1)$ y a $\vec{v}(2,1,-1)$:

$$\begin{cases}[\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{u}=0\\[\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{v}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+2\beta-\alpha+4+2\beta-4\alpha-5-\beta-\alpha=0\\2+4\beta-2\alpha+2+\beta-2\alpha+5+\beta+\alpha=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6\alpha-3\beta=0\\3\alpha-6\beta=9\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}6&-3&0\\3&-6&9\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}6&-3&0\\-9&0&9\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}2&-1&0\\1&0&-1\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}2\alpha-\beta=0\\\alpha=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=-2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\overset{4}{\Rightarrow}\begin{cases}X(-1,-5,4)\\Y(-3,-3,2)\end{cases}\Rightarrow[\overrightarrow{XY}]=(-2,2,-2)\Rightarrow XY\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-4}{1}$$

1 2ªf-1ªf.

2 2ªf-2·1ªf.

3 1ªf·1/3; 2ªf·(-1/9).

4 Si resultara que los puntos X e Y coinciden, eso significaría que las rectas r y s se cortan en dicho punto. En ese caso, la recta buscada pasa por ese punto y tiene por vector direccional el producto vectorial de los vectores direccionales de las rectas r y s.

SEGUNDO MÉTODO:

Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares a la recta que buscamos, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}=-3(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$$

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix}x & y+3 & z-5\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3x-3(z-5)=0 \Rightarrow x-z+5=0$$

Como el punto Y está en la recta s[1]: $Y(1+2\beta,-1+\beta,-\beta)$.

Como el punto Y está en el plano π, satisface su ecuación:

$$1+2\beta+\beta+5=0 \Rightarrow 3\beta=-6 \Rightarrow \beta=-2 \Rightarrow Y(-3,-3,2)$$

Por tanto, la recta buscada es:

$$XY\equiv\frac{x+3}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{1}$$

[1] En lugar de lo que sigue, se podría calcular la ecuación del plano π'. Entonces la recta XY sería la intersección de los planos π y π'.

Junio de 2011. Problema B3.

Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x)=\cos x+\operatorname{sen} x$ en el intervalo $[\pi/2,3\pi/2]$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 Puntos)

1º) Estudiamos la continuidad de la función en el intervalo:

$$f(x)=\cos x+\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{sen} x+\cos x \Rightarrow \mathrm{Dom}(f')=\mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ es continua en } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ es continua en } [\pi/2,3\pi/2]$$

Por el teorema de Weierstrass la función f alcanza en dicho intervalo sus extremos absolutos. Éstos se encuentran en los extremos del intervalo o entre sus extremos relativos.

2º) Calculamos los valores de f en los extremos del intervalo:

$$f(\pi/2)=\cos(\pi/2)+\operatorname{sen}(\pi/2)=0+1=1$$

$$f(3\pi/2)=\cos(3\pi/2)+\operatorname{sen}(3\pi/2)=0-1=-1$$

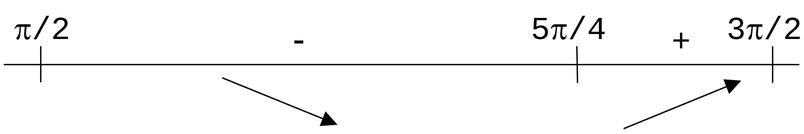
3º) Hallamos los extremos relativos de la función en el intervalo:

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \cos x-\operatorname{sen} x=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x=\cos x \Rightarrow x=\pi/4+k\pi$$

El único de estos valores que pertenece al intervalo que estamos considerando es $x=5\pi/4$.

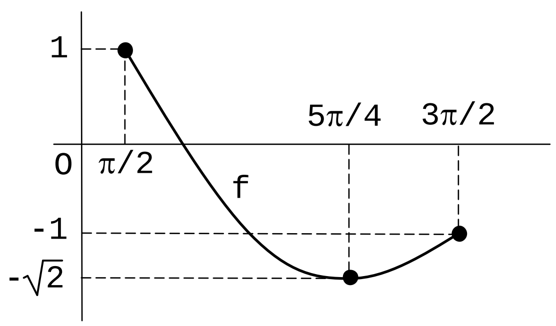
Estudiamos el signo de f' en el intervalo:



Como f es continua en $x=5\pi/4$, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera f tiene un mínimo relativo en $x=5\pi/4$ que vale $f(5\pi/4)=\cos(5\pi/4)+\operatorname{sen}(5\pi/4)=-\sqrt{2}/2-\sqrt{2}/2=-\sqrt{2}$.

4º) Conclusión:

La función f tiene en $x=\pi/2$ un máximo absoluto que vale $y=1$; y en $x=5\pi/4$ un mínimo absoluto que vale $y=-\sqrt{2}$:



JUNIO DE 2011. PROBLEMA B4.

Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ y $g(x)=\frac{1-x^2}{2}$. (Observa que f(x) es la parte no negativa de la circunferencia de centro el origen y radio 1.) (3 Puntos)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\sqrt{1-x^2} \\ y=(1-x^2)/2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\frac{1-x^2}{2} \Rightarrow 2\cdot\sqrt{1-x^2}=1-x^2 \Rightarrow 4(1-x^2)=(1-x^2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-x^2)^2-4(1-x^2)=0 \Rightarrow (1-x^2)[1-x^2-4]=0 \Rightarrow \begin{cases} 1-x^2=0 \\ -3-x^2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x^2=-3 \end{cases} \Rightarrow x=\pm 1$$

2º) Averiguamos entre -1 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
0	1	1/2

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1-x^2}{2}\right)\cdot dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\cdot dx-\frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cdot dx \stackrel{1}{=}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3\pi-4}{6}$$

---

[1] La primera integral es el área de una semicircunferencia: $\pi/2$. Eso es lo que se nos dice en la observación. También puede hacerse esa integral con los cambios de variable $\operatorname{sen} x=t$ o $\cos x=t$. La segunda integral es inmediata.