JUNIO DE 2012. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a^2+a-2)x-2ay+az=-1\\(a^2+a-2)x+a^2y+(a+1)z=0\\(a^2+a-2)x-2ay+a^2z=3a-1\end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a^2+a-2 & -2a & a & -1\\a^2+a-2 & a^2 & a+1 & 0\\a^2+a-2 & -2a & a^2 & 3a-1\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{a^2+a-2} & -2a & a & -1\\0 & \mathbf{a^2+2a} & 1 & 1\\0 & 0 & \mathbf{a^2-a} & 3a\end{array}\right)\overset{2}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow\begin{cases}a^2+a-2=0 \Rightarrow a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow a=-2,\ a=1\\a^2+2a=0 \Rightarrow a(a+2)=0 \Rightarrow a=0,\ a=-2\\a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow a=0,\ a=1\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-2, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 4 & -2 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 6 & -6\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 4 & -2 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & -12\end{array}\right)$$

2º) Si a=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}-2x=-1\\z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1/2\\z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1/2\\y=\alpha\\z=1\end{cases}$$

3º) Si a=1, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -2 & 1 & -1\\0 & 3 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right)$$

4º) Si a≠-2, a≠0 y a≠1, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r}(a^2+a-2)x-2ay+az=-1\\(a^2+2a)y+z=1\\(a^2-a)z=3a\end{array}\right\}\Rightarrow z=\frac{3a}{a(a-1)}\Rightarrow\boxed{z=\frac{3}{a-1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a^2+2a)y=1-z=1-\frac{3}{a-1}=\frac{a-1-3}{a-1}=\frac{a-4}{a-1}\Rightarrow\boxed{y=\frac{a-4}{a(a+2)(a-1)}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+2)(a-1)x=-1+2ay-az=-1+\frac{2(a-4)}{(a+2)(a-1)}-\frac{3a}{a-1}=$$

$$=\frac{-a^2+a-2a+2+2a-8-3a^2-6a}{(a+2)(a-1)}=\frac{-4a^2-5a-6}{(a+2)(a-1)}\Rightarrow\boxed{x=\frac{-(4a^2+5a+6)}{(a+2)^2(a-1)^2}}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.

2 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.

3 3ªf-6·2ªf.

JUNIO DE 2012. PROBLEMA A2.

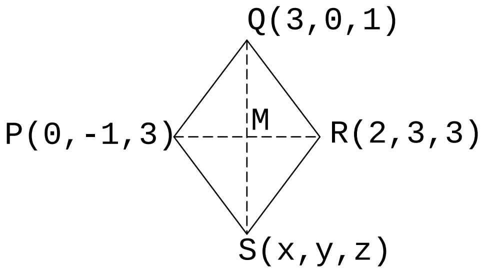
Los puntos P(0,-1,3), Q(3,0,1) y R(2,3,3) son tres vértices de un rombo. Encuentra el cuarto vértice. (2 PUNTOS)

Averiguamos la posición relativa de los vértices del rombo:

$$d(P,Q)=\sqrt{(3-0)^2+(0+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$$

$$d(Q,R)=\sqrt{(2-3)^2+(3-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$$

$$d(P,R)=\sqrt{(2-0)^2+(3+1)^2+(3-3)^2}=\sqrt{4+16+0}=2\sqrt{5}$$



A continuación puede seguirse uno de los siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

$$[\overrightarrow{PS}]=[\overrightarrow{QR}] \Rightarrow (x,y+1,z-3)=(-1,3,2) \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y+1=3 \\ z-3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=5 \end{cases}$$

SEGUNDO MÉTODO:

$$[\overrightarrow{QS}]=[\overrightarrow{QR}]+[\overrightarrow{QP}]= \Rightarrow (x-3,y,z-1)=(-1,3,2)+(-3,-1,2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3,y,z-1)=(-4,2,4) \Rightarrow \begin{cases} x-3=-4 \\ y=2 \\ z-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=5 \end{cases}$$

TERCER MÉTODO:

Si M es el centro del rombo, como es el punto medio del segmento PR, sus coordenadas son: M(1,1,3).

Como M es también el punto medio del segmento QS, se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{3+x}{2}=1 \\ \dfrac{0+y}{2}=1 \\ \dfrac{1+z}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+x=2 \\ y=2 \\ 1+z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=5 \end{cases}$$

Junio de 2012. Problema A3.

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int (2x+1)\cdot e^{-x}\cdot dx \qquad y \qquad \int \frac{-4\cdot dx}{x^2+2x-3}$$ (2 Puntos)

Primera integral:

$$\int (2x+1)\cdot e^{-x}\cdot dx \overset{1}{=} -(2x+1)\cdot e^{-x}-2\cdot e^{-x}+C =(-2x-1-2)\cdot e^{-x}+C=-(2x+3)\cdot e^{-x}+C$$

S	D	I
+	2x+1	e^{-x}
-	2	$-e^{-x}$
+	0	e^{-x}

Comprobación:

$$[(-2x-3)\cdot e^{-x}]'=-2\cdot e^{-x}+(-2x-3)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=(-2+2x+3)\cdot e^{-x}=(2x+1)\cdot e^{-x}$$

Segunda integral:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{-4}{x^2+2x-3}=\frac{-4}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A\cdot(x+3)+B\cdot(x-1)}{x^2+2x-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4=A\cdot(x+3)+B\cdot(x-1) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=1 \Rightarrow -4=4A \Rightarrow A=-1 \\ \text{Si } x=-3 \Rightarrow -4=-4B \Rightarrow B=1 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{-4\cdot dx}{x^2+2x-3}=\int \frac{-1}{x-1}\cdot dx+\int \frac{1}{x+3}\cdot dx=-\int \frac{1}{x-1}\cdot dx+\int \frac{1}{x+3}\cdot dx \overset{2}{=}$$

$$=-\ln|x-1|+\ln|x+3|+C$$

Comprobación:

$$(-\ln|x-1|+\ln|x+3|)'=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}=\frac{-x-3+x-1}{(x-1)(x+3)}=\frac{-4}{x^2+2x-3}$$

---

[1] Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son casi inmediatas de tipo exponencial. Se puede simplificar su cálculo con el cambio: -x=t, -dx=dt.

[2] Las dos integrales son casi inmediatas de tipo logarítmico.

Junio de 2012. Problema A4.

Dada la siguiente función, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,3)$ tal que $f'(\alpha)=3$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso:

$$f(x)=\frac{2\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)}{2^{x\cos(\pi x^2)}\cdot\sqrt[3]{x^2-4x+11}}$$ (3 Puntos)

Si[1] $u=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)$, $v=2^{x\cdot\cos(\pi x^2)}$ y $w=\sqrt[3]{x^2-4x+11}$, entonces:

$$f=\frac{u}{v\cdot w}\Rightarrow f'=\frac{u'vw-u(v'w+vw')}{v^2w^2}$$

Como $Dom(u)=Dom(v)=Dom(w)=R$, $v>0$ (ya que una función exponencial es siempre positiva) y $w>0$ (ya que $x^2-4x+11>0$), entonces $Dom(f)=R$.

Como, además, $Dom(u')=Dom(v')=Dom(w')=R$, también $Dom(f')=R$:

- $u'=2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x^2\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2x\right)$
- $v'=2^{x\cdot\cos(\pi x^2)}\cdot[\cos(\pi x^2)-x\cdot\operatorname{sen}(\pi x^2)\cdot 2\pi x]\cdot\ln 2$
- $w'=\frac{1}{3}\cdot(x^2-4x+11)^{-2/3}\cdot(2x-4)$

Por otro lado:

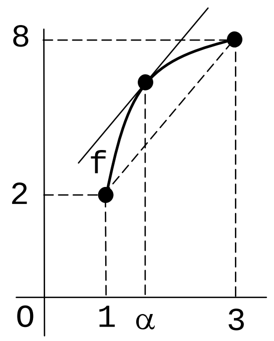
$$f(3)=\frac{2\cdot\operatorname{sen}(9\pi/2)}{2^{3\cdot\cos(9\pi)}\cdot\sqrt[3]{9-12+11}}=\frac{2}{2^{-3}\cdot 2}=8$$

$$f(1)=\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\pi/2)}{2^{\cos\pi}\cdot\sqrt[3]{1-4+11}}=\frac{2}{2^{-1}\cdot 2}=2$$

* * *

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange, existe α en (1,3) tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{8-2}{2}=\frac{6}{2}=3$$



En efecto:

1ª) f es continua en [1,3] por ser derivable en R.

2ª) f es derivable en (1,3) por serlo en R.

[1] Podemos evitarnos el cálculo de la derivada de la función reduciéndonos al de sus elementos.

JUNIO DE 2012. PROBLEMA B1.

Encuentra los valores de $t \in R$ para los que la siguiente matriz no es regular:

$$A=\begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ t+1 & t+1 & 1 \\ 1-t & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Desarrollamos el determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ t+1 & t+1 & 1 \\ 1-t & 0 & t-1 \end{vmatrix}=t(t+1)(t-1)+(1-t)-2(t+1)(1-t)-(t+1)(t-1)=$$

$$=(t-1)\cdot[t(t+1)-1+2(t+1)-(t+1)]=(t-1)(t^2+t-1+2t+2-t-1)=$$

$$=(t-1)(t^2+2t)=t(t+2)(t-1)$$

Si la matriz A no es regular, su determinante es cero:

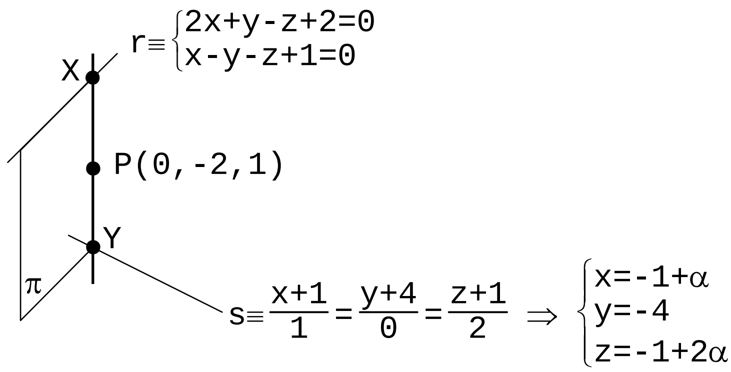
$$|A|=0 \Rightarrow t(t+2)(t-1)=0 \Rightarrow t=0,\ t=-2,\ t=1$$

Junio de 2012. Problema B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(0,-2,1) y corta a las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}2x+y-z+2=0\\x-y-z+1=0\end{cases}\quad \text{y} \quad s\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y+4}{0}=\frac{z+1}{2}$$ (3 Puntos)

Sean X e Y los puntos de corte de la recta que buscamos con r y s, respectivamente.



La recta XY y la recta r determinan el plano π:

Como el plano π pertenece al haz de planos de arista la recta r, tiene por ecuación:

$$\pi\equiv a(2x+y-z+2)+b(x-y-z+1)=0$$

Como el punto P(0,-2,1) está en el plano π, satisface su ecuación:

$$a(0-2-1+2)+b(0+2-1+1)=0 \Rightarrow -a+2b=0 \Rightarrow a=2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b(2x+y-z+2)+b(x-y-z+1)=0 \Rightarrow b(4x+2y-2z+4+x-y-z+1)=0 \overset{1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \pi\equiv 5x+y-3z+5=0$$

Como el punto Y está en la recta s:

$$Y(-1+\alpha,-4,-1+2\alpha)$$

Como el punto Y está en el plano π, satisface su ecuación:

$$5(-1+\alpha)-4-3(-1+2\alpha)+5=0 \Rightarrow -5+5\alpha-4+3-6\alpha+5=0 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(-2,-4,-3) \Rightarrow [\overrightarrow{PY}]=(-2,-2,-4) \Rightarrow XY\equiv\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$$

[1] Ya que b≠0. Si b=0, entonces a=0; pero a y b no pueden ser simultáneamente nulos.

JUNIO DE 2012. PROBLEMA B3.

Demuestra que la derivada de la función $f(x)=x^{\operatorname{sen} x}$ se anula en algún punto del intervalo abierto $(\pi/2,\pi)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 PUNTOS)

Primero derivamos la función[1]:

$$f(x)=x^{\operatorname{sen} x}=e^{\operatorname{sen} x\cdot \ln x} \Rightarrow f'(x)=e^{\operatorname{sen} x\cdot \ln x}\cdot[\operatorname{sen} x\cdot \ln x]'=$$

$$=x^{\operatorname{sen} x}\cdot\left(\cos x\cdot \ln x+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$

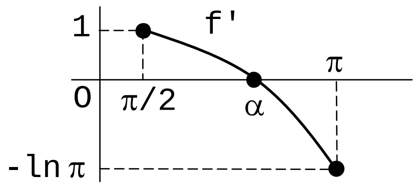
* * *

Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano[2], existe α en el intervalo abierto $(\pi/2,\pi)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) $f'(\pi/2)\cdot f'(\pi)<0$:

- $f'(\pi/2)=(\pi/2)^1\cdot\left(0\cdot \ln\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi/2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=1>0.$
- $f'(\pi)=\pi^0\cdot\left(-1\cdot \ln\pi+\frac{0}{\pi}\right)=-\ln\pi\simeq-1{,}14<0.$



2ª) f' es continua en $[\pi/2,\pi]$:

- $[\pi/2,\pi]\subset \operatorname{Dom}(f')=\operatorname{Dom}(f)=(0,+\infty)$.
- Si $a\in[\pi/2,\pi]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\left[x^{\operatorname{sen} x}\cdot\left(\cos x\cdot \ln x+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\right]=a^{\operatorname{sen} a}\cdot\left(\cos a\cdot \ln a+\frac{\operatorname{sen} a}{a}\right)=f'(a)$$

[1] Puede derivarse directamente, sin necesidad de transformarla en una función exponencial, aplicando el método de derivación logarítmica.

[2] Como $f(\pi/2)\neq f(\pi)$, no aplicamos el teorema de Rolle.

JUNIO DE 2012. PROBLEMA B4.

Dadas las funciones $f(x)=5-x^2$ y $g(x)=4/x^2$, calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de f(x) y g(x). (3 Puntos)

Como las funciones son pares, nos reduciremos a la parte positiva del eje de abscisas:

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=5-x^2 \\ y=4/x^2 \end{cases} \Rightarrow 5-x^2=\frac{4}{x^2} \Rightarrow 5x^2-x^4=4 \Rightarrow x^4-5x^2+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre 1 y 2 qué función está por encima y qué función está por debajo[1]:

x	y_1	y_2
3/2	11/4=99/36	16/9=64/36

3º) Calculamos el área:

$$\frac{A}{2}=\int_1^2[5-x^2-4\cdot x^{-2}]\cdot dx=\left(5x-\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right)_1^2=\left(5x-\frac{x^3}{3}+\frac{4}{x}\right)_1^2=$$

$$=\left(10-\frac{8}{3}+2\right)-\left(5-\frac{1}{3}+4\right)=12-\frac{8}{3}-9+\frac{1}{3}=3-\frac{7}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow A=\frac{4}{3}$$

---

[1] Observa que entre 0 y 1, al no estar definida la función g en el origen de coordenadas, las funciones f y g no encierran ninguna región del plano. Esto puede verse más claramente dibujando sus gráficas.