SEPTIEMBRE DE 2007. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+2y+az=0 \\ ax+(3a-1)y+(1+a^2)z=2 \\ x+2y+(a^2-a)z=a-2 \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 0 \\ a & 3a-1 & 1+a^2 & 2 \\ 1 & 2 & a^2-a & a-2 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & a & 0 \\ 0 & \mathbf{a-1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{a^2-2a} & a-2 \end{array}\right) \overset{2}{\rightarrow} \begin{cases} a-1=0 \\ a(a-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=0,\ a=2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=0, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

2º) Si a=1, el sistema es incompatible[3]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3º) Si a=2, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+2y+2z=0 \\ y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

4º) Si a≠0, a≠1 y a≠2, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+az=0 \\ (a-1)y+z=2 \\ a(a-2)z=a-2 \end{array}\right\} \overset{5}{\Rightarrow} z=\frac{a-2}{a(a-2)}=\frac{1}{a} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1)y=2-z=2-\frac{1}{a}=\frac{2a-1}{a} \Rightarrow y=\frac{2a-1}{a(a-1)}=\frac{2a-1}{a^2-a} \Rightarrow \boxed{y=\frac{2a-1}{a^2-a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-2y-az=\frac{2-4a}{a(a-1)}-1=\frac{2-4a-a^2+a}{a(a-1)}=\frac{-a^2-3a+2}{a^2-a} \Rightarrow \boxed{x=\frac{-a^2-3a+2}{a^2-a}}$$

---

1 2ªf-a·1ªf; 3ªf-1ªf.
2 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.
3 Observa que hay que seguir aplicando Gauss hasta obtener un sistema escalonado.
4 3ªf+2ªf.
5 Como ya se han estudiado los casos en los que se anulan los coeficientes de las incógnitas que vamos a despejar, podemos hacer esto tranquilamente.

SEPTIEMBRE DE 2007. PROBLEMA A2.

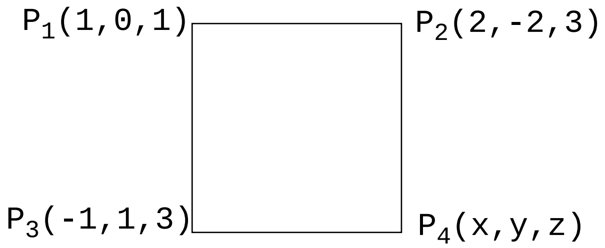
Los puntos $P_1(1,0,1)$, $P_2(2,-2,3)$ y $P_3(-1,1,3)$ son tres vértices de un cuadrado. Encuentra el cuarto vértice. (2 PUNTOS)

Averiguamos primero[1] la posición relativa de los vértices del cuadrado:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(1-2)^2+(0+2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{1+4+4}=3$$

$$d(P_2,P_3)=\sqrt{(-1-2)^2+(1+2)^2+(3-3)^2}=\sqrt{9+9+0}=3\sqrt{2}$$

Por tanto, el cuarto vértice es el opuesto a P_1:



A continuación puede seguirse uno de los siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

$$[\overrightarrow{P_1P_2}]=[\overrightarrow{P_3P_4}] \Rightarrow (1,-2,2)=(x+1,y-1,z-3) \Rightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ y-1=-2 \\ z-3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=5 \end{cases}$$

SEGUNDO MÉTODO:

$$[\overrightarrow{P_1P_2}]+[\overrightarrow{P_1P_3}]=[\overrightarrow{P_1P_4}] \Rightarrow (1,-2,2)+(-2,1,2)=(x-1,y,z-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1,-1,4)=(x-1,y,z-1) \Rightarrow \begin{cases} x-1=-1 \\ y=-1 \\ z-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=5 \end{cases}$$

TERCER MÉTODO:

Si C es el centro del cuadrado, como es el punto medio del segmento P_2P_3, sus coordenadas son: $C(1/2,-1/2,3)$.

Como C es también el punto medio del segmento P_1P_4, se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y+0}{2}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{z+1}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ y=-1 \\ z+1=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=5 \end{cases}$$

[1] Este ejercicio ha sido corregido. En la versión anterior, al no tenerse la precaución de averiguar la posición relativa de los vértices dados, dando por supuesto que eran consecutivos, el problema estaba mal resuelto.

SEPTIEMBRE DE 2007. PROBLEMA B1.

Dada la matriz A, encuentra dos matrices B y C, de tamaño 3×2 y de rango 2, tales que el rango de $A\cdot B$ sea 2 y el rango de $A\cdot C$ sea 1:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

(2 PUNTOS)

CÁLCULO DE B:

Como B es una matriz 3×2, es de la forma:

$$B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}$$

Calculamos $A\cdot B$:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

Para que se cumpla que $rg(B)=2$ y $rg(A\cdot B)=2$, basta elegir los parámetro adecuadamente. Por ejemplo: $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$, $e=0$ y $f=0$:

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

CÁLCULO DE C:

Como C es una matriz 3×2, es de la forma:

$$C=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}$$

Calculamos $A\cdot C$:

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

Para que se cumpla que $rg(C)=2$ y $rg(A\cdot C)=1$, basta elegir los parámetro adecuadamente. Por ejemplo: $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=0$, $e=0$ y $f=1$:

$$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad A\cdot C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

SEPTIEMBRE DE 2007. PROBLEMA B2.

El plano π es el que pasa por los puntos $P_1(-3,0,0)$, $P_2(1,-1,-1)$ y $P_3(-1,0,-1)$. Encuentra los dos puntos de la recta r que están a distancia 1 del plano π:

$$r\equiv\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{-1}$$

(3 PUNTOS)

Como $[\overrightarrow{P_1P_2}]=(4,-1,-1)$ y $[\overrightarrow{P_1P_3}]=(2,0,-1)$, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y & z \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+3+2y+2z=0 \Rightarrow x+2y+2z+3=0$$

Calculamos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{-1}=\alpha \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=1 \\ z=-2-\alpha \end{cases}$$

Si X es un punto de la recta r:

$$X(\alpha,1,-2-\alpha)$$

Como la distancia del punto X al plano π es 1:

$$d(X,\pi)=1 \Rightarrow \frac{|\alpha+2-4-2\alpha+3|}{\sqrt{1+4+4}}=1 \Rightarrow \frac{|1-\alpha|}{3}=1 \Rightarrow |1-\alpha|=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\alpha=3 \\ 1-\alpha=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-2 \\ \alpha=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(-2,1,0) \\ X(4,1,-6) \end{cases}$$

SEPTIEMBRE DE 2007. PROBLEMA C1.

Halla los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{\ln(2x+1)-\operatorname{sen}(2x)}$$

(2 PUNTOS)

PRIMER LÍMITE:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} \stackrel{1}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)} \stackrel{2}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}+\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}}{x+2-x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}+\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}+1\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}}+1\right) =1+1+1+1=4$$

SEGUNDO LÍMITE:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{\ln(2x+1)-\operatorname{sen}(2x)} \stackrel{3}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot e^{x^2}+2x\cdot e^{-x^2}}{\frac{2}{2x+1}-2\cos(2x)} \stackrel{4}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x\left(e^{x^2}+e^{-x^2}\right)(2x+1)}{2-2(2x+1)\cos(2x)} \stackrel{5}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\left(e^{x^2}+e^{-x^2}\right)(2x+1)\right]\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2-2(2x+1)\cos(2x)} \stackrel{3}{=}$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{-4\cdot\cos(2x)+4(2x+1)\cdot\operatorname{sen}(2x)} = 2\cdot\frac{2}{-4} = -1$$

---

1 Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador.
2 Operamos numerador y denominador.
3 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.
4 Sacamos factor común en el numerador y multiplicamos numerador y denominador por 2x+1.
5 El límite de un producto es el producto de los límites de los factores. La descomposición en dos límites, el primero de los cuales es determinado, simplifica la aplicación de L'Hôpital al otro.

SEPTIEMBRE DE 2007. PROBLEMA C2.

Demuestra que la función $f(x)=(x+1)\cdot\ln(2x^2-x+1)$ tiene un mínimo relativo en el intervalo $(0,1)$. Menciona los resultados teóricos que utilices. (3 Puntos)

1º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, se considera la función:

- $f'(x)=\ln(2x^2-x+1)+(x+1)\cdot\dfrac{4x-1}{2x^2-x+1}=\ln(2x^2-x+1)+\dfrac{4x^2+3x-1}{2x^2-x+1}$
- $\mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$, ya que:

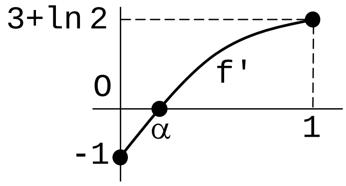
$$2x^2-x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2} \Rightarrow 2x^2-x+1>0$$

2º) Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en $(0,1)$ tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) $f'(0)\cdot f'(1)<0$:

- $f'(0)=0-1=-1<0$.
- $f'(1)=\ln 2+3\simeq 3,7>0$.



2ª) f' es continua en $[0,1]$:

- $[0,1]\subset\mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$.
- Si $a\in[0,1]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\left(\ln(2x^2-x+1)+\frac{4x^2+3x-1}{2x^2-x+1}\right)=\ln(2a^2-a+1)+\frac{4a^2+3a-1}{2a^2-a+1}=f'(a)$$

3º) Ahora bien, como f es continua en α, por ser derivable en dicho punto, y f' es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de α, entonces, por el criterio de la variación del signo de la primera derivada, f tiene en dicho punto un mínimo relativo.

Septiembre de 2007. Problema D1.

Halla las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{2x^2+x}{x-1}$$ (2 Puntos)

1º) El dominio de la función es $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

2º) La recta $x=1$ es asíntota vertical de la función:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} y = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{2x^2+x}{x-1}=\frac{3}{0^-}=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} y = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{2x^2+x}{x-1}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

3º) La recta $y=2x+3$ es asíntota oblicua de la función en $+\infty$ y $-\infty$:

Primer método:

- $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x}{x-1} \overset{1}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (2x) = \pm\infty$
- $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x-1} \overset{2}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 2 = 2$
- $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty} [y-mx]= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2+x}{x-1}-2x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-2x^2+2x}{x-1} =$

$$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x-1} \overset{3}{=} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 3 = 3$$

Segundo método:

Como se trata de una función racional (cociente de polinomios), puede hallarse la asíntota oblicua del siguiente modo:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+x & x-1 \\ \cline{2-2} -2x^2+2x & 2x+3 \\ \cline{1-1} 3x & \\ -3x+3 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

$$y=\frac{2x^2+x}{x-1}=2x+3+\frac{3}{x-1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} [y-(2x+3)]= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x-1}=0$$

---

[1] $2x^2+x \sim 2x^2$ y $x-1\sim x$ en $+\infty$ y en $-\infty$. También puede hacerse sacando factor común la máxima potencia de x en el numerador y en el denominador, simplificando a continuación. O por L'Hôpital. O haciendo la división. Incluso directamente. Lo mismo puede decirse de los dos límites siguientes.

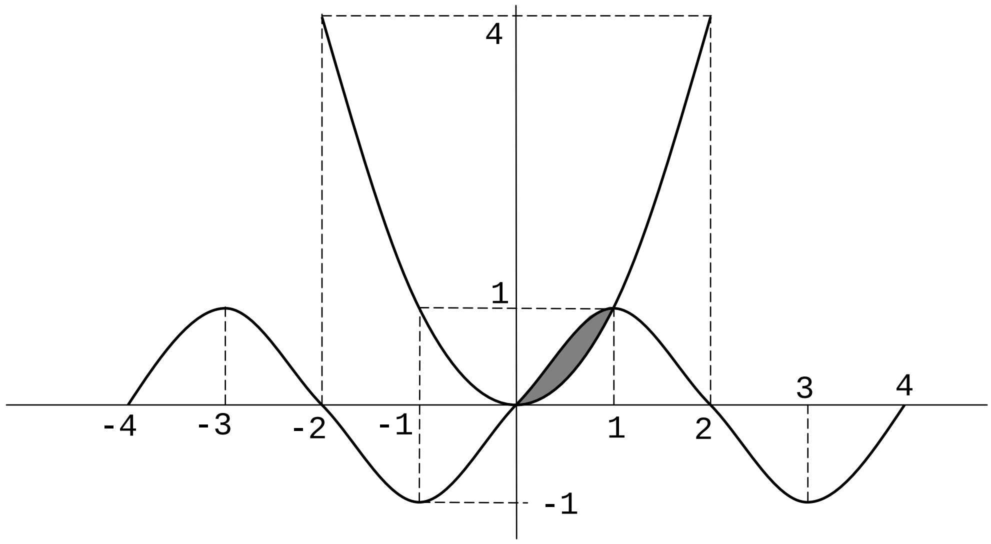
[2] $2x+1\sim 2x$ y $x-1\sim x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

[3] $x-1\sim x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

SEPTIEMBRE DE 2007. PROBLEMA D2.

Dibuja las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot x)$. Comprueba que sólo se cortan cuando x=0 o x=1. Calcula el área de la región del plano encerrada por las gráficas de las funciones f(x) y g(x). (3 Puntos)

1º) Dibujamos aproximadamente las gráficas:



2º) Comprobamos que solo se cortan en 0 y 1.

- En 0 y 1 se cortan:

$$\begin{cases} y_1=x^2 \\ y_2=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) \end{cases} \Rightarrow$$

x	y_1	y_2
0	0	0
1	1	1

- No se cortan en más puntos:
  - Si $x<-1$ o $x>1$: $y_1>1$ e $y_2\leq 1$.
  - Si $-1\leq x<0$: $y_1>0$ e $y_2<0$.
  - Si $0<x<1$: y_1 es convexa e y_2 es cóncava, pues sus segundas derivadas son $y_1''=2>0$ e $y_2''=-(\pi/2)2\cdot\operatorname{sen}(\pi x/2)<0$.

3º) Averiguamos entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo[1]:

x	y_1	y_2
1/2	1/4	$\sqrt{2}/2$

4º) Calculamos el área:

$$A=\int_0^1\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-x^2\right]\cdot dx \overset{2}{=} \left(-\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)-\frac{x^3}{3}\right)_0^1=$$

$$=\left(-\frac{2}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\cdot\cos 0-0\right)=-\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}=\frac{6-\pi}{3\pi}$$

1 En este caso este paso no es necesario pues ha sido resuelto ya.
2 Una integral es de tipo coseno y la otra inmediata.