Septiembre de 2008. Problema A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2x+\quad y-\quad 2z= 0 \\ 2x+(a+1)y \qquad = 2 \\ 2x+(a+1)y+(a^2-1)z=a+3 \end{cases}$$

(3 Puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & a+1 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a^2-1 & a+3 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & a & 2 & 2 \\ 0 & a & a^2+1 & a+3 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{2} & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{a^2-1} & a+1 \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a=0 \\ (a-1)(a+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1,\ a=-1 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ \quad -y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=-y+2z=2-2z+2z=2 \\ y=-2+2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2+2\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

2º) Si a=0, el sistema es incompatible[4]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

3º) Si a=1, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

4º) Si $a\neq0$ y $a\neq\pm1$, el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ ay+2z=2 \\ (a^2-1)z=a+1 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{a+1}{(a+1)(a-1)}=\frac{1}{a-1} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ay=2-2z=2-\frac{2}{a-1}=\frac{2a-4}{a-1} \Rightarrow \boxed{y=\frac{2a-4}{a^2-a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=-y+2z=\frac{4-2a}{a(a-1)}+\frac{2}{a-1}=\frac{4-2a+2a}{a(a-1)}=\frac{4}{a(a-1)} \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{a^2-a}}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.
2 3ªf-2ªf.
3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.
4 Observa que hay que seguir aplicando Gauss hasta obtener un sistema escalonado.
5 2ªf·1/2.
6 3ªf+2ªf.

SEPTIEMBRE DE 2008. PROBLEMA A2.

Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(1,0,1) y no corta al plano $\pi_1 \equiv 3x-y-z+1=0$ ni al plano que pasa por los puntos $Q_1(1,-1,1)$, $Q_2(0,1,-2)$ y $Q_3(-1,0,1)$.

(2 PUNTOS)

PRIMER MÉTODO:

Como la recta buscada no corta al plano π_1, es paralela a él; por tanto, el vector característico de dicho plano, $\vec{u}=(3,-1,-1)$, es perpendicular a la recta.

Como la recta buscada no corta al plano $Q_1Q_2Q_3$, es paralela a él; por tanto, el vector característico del plano, $[\overrightarrow{Q_1Q_2}]\wedge[\overrightarrow{Q_1Q_3}]$, es perpendicular a la recta:

$$[\overrightarrow{Q_1Q_2}]\wedge[\overrightarrow{Q_1Q_3}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=3\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}=3(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}) \rightarrow \vec{v}=(1,2,1)$$

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares a la recta buscada, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta buscada es:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z-1}{7}$$

SEGUNDO MÉTODO:

Como la recta buscada no corta al plano π_1, se encuentra en el plano paralelo que pasa por P:

$$3x-y-z+D=0 \Rightarrow 3-0-1+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow 3x-y-z-2=0$$

Como la recta buscada no corta al plano determinado por los puntos Q_1, Q_2 y Q_3, está en el plano paralelo que pasa por P:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3(x-1)+6y+3(z-1)=0 \Rightarrow 3x+6y+3z-6=0 \Rightarrow x+2y+z-2=0$$

La recta buscada es la intersección de ambos planos:

$$\begin{cases} x+2y+z-2=0 \\ 3x-y-z-2=0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+2y+z=2 \\ 4x+y=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=2-x-2y=2-x-8+8x=-6+7x \\ y=4-4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=4-4\alpha \\ z=-6+7\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z+6}{7}$$

---

1 2ªf+1ªf.

SEPTIEMBRE DE 2008. PROBLEMA B1.

Dadas las matrices A y B, calcula el valor de t para que se cumpla A·B=B·A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & t\end{pmatrix}$$

(2 PUNTOS)

$$A\cdot B=B\cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & -1+t^2\\ 0 & 2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2t-2\\ 0 & 2t\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+t^2=2t-2 \Rightarrow t^2-2t+1=0 \Rightarrow t=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1$$

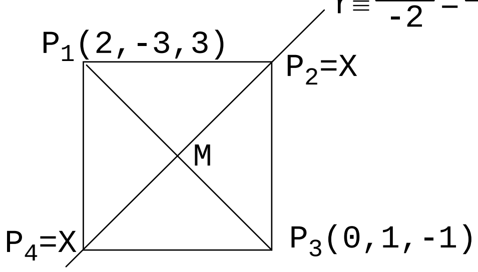
SEPTIEMBRE DE 2008. PROBLEMA B2.

Se sabe que los puntos $P_1(2,-3,3)$ y $P_3(0,1,-1)$ son vértices de un cuadrado C. Halla los otros dos vértices de C, sabiendo que están en la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$$

(3 PUNTOS)

$$r \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=-2+\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases}$$



Sea X cualquiera de los dos puntos que andamos buscando. Por estar en r: $X(3-2\alpha,-2+\alpha,-1+2\alpha)$.

A continuación puede seguirse uno de los dos siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Si M es el centro del cuadrado, como es el punto medio del segmento P_1P_3: $M(1,-1,1)$.

Por tanto:

$$d(M,X)=d(M,P_1) \Rightarrow \sqrt{(2-2\alpha)^2+(-1+\alpha)^2+(-2+2\alpha)^2}=\sqrt{1+4+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+4\alpha^2-8\alpha+1+\alpha^2-2\alpha+4+4\alpha^2-8\alpha=9 \Rightarrow 9\alpha^2-18\alpha=0 \Rightarrow 9\alpha(\alpha-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \Rightarrow P_2(3,-2,-1) \\ \alpha=2 \Rightarrow P_4(-1,0,3) \end{cases}$$

SEGUNDO MÉTODO:

Por ser $P_1P_2P_3P_4$ un cuadrado, los vectores $[\overrightarrow{XP_1}]$ y $[\overrightarrow{XP_3}]$ son perpendiculares:

$$[\overrightarrow{XP_1}]\cdot[\overrightarrow{XP_3}]=0 \Rightarrow (2\alpha-1,-\alpha-1,4-2\alpha)\cdot(2\alpha-3,3-\alpha,-2\alpha)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2-6\alpha-2\alpha+3-3\alpha+\alpha^2-3+\alpha-8\alpha+4\alpha^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2-18\alpha=0 \Rightarrow 9\alpha(\alpha-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \Rightarrow P_2(3,-2,-1) \\ \alpha=2 \Rightarrow P_4(-1,0,3) \end{cases}$$

SEPTIEMBRE DE 2008. PROBLEMA C1.

Halla la integral indefinida

$$\int x^2 \cdot \text{sen}(2x) \cdot dx$$

(2 PUNTOS)

Puede seguirse uno de los dos métodos siguientes:

PRIMER MÉTODO:

$$\int x^2 \cdot \text{sen}(2x) \cdot dx \stackrel{1}{=} -\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \text{sen}(2x) + \frac{1}{4} \cdot \cos(2x) + C$$

S	D	I
+	x^2	sen(2x)
-	2x	-cos(2x)/2
+	2	-sen(2x)/4
-	0	cos(2x)/8

SEGUNDO MÉTODO:

$$\int x^2 \cdot \text{sen}(2x) \cdot dx \stackrel{2}{=} \int (t/2)^2 \cdot \text{sen}\, t \cdot (dt/2) = \frac{1}{8} \cdot \int t^2 \cdot \text{sen}\, t \cdot dt \stackrel{3}{=}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot (-t^2 \cos t + 2t \,\text{sen}\, t + 2\cos t) + C \stackrel{4}{=}$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot 4x^2 \cos(2x) + \frac{1}{4} \cdot 2x \cdot \text{sen}(2x) + \frac{1}{4} \cdot \cos(2x) + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \text{sen}(2x) + \frac{1}{4} \cdot \cos(2x) + C$$

S	D	I
+	t^2	sen t
-	2t	-cos t
+	2	-sen t
-	0	cos t

Comprobación[5]:

$$\left(-\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \text{sen}(2x) + \frac{1}{4} \cdot \cos(2x)\right)' =$$

$$= -x \cdot \cos(2x) + x^2 \cdot \text{sen}(2x) + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2x) + x \cdot \cos(2x) - \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2x) = x^2 \cdot \text{sen}(2x)$$

---

[1] Hacemos esta integral por partes. Las integrales realizadas en la columna I son casi inmediatas de tipo seno y coseno.

[2] Hacemos primero el cambio de variable: $2x = t \Rightarrow 2 \cdot dx = dt$.

[3] Después del cambio, resulta más sencillo el cálculo de las integrales de la columna I pues son inmediatas de tipo seno y coseno, pero el problema resulta ser más largo.

[4] Deshacemos el cambio.

[5] Si no resulta muy difícil el cálculo de las derivadas, es conveniente hacer la comprobación para cerciorarnos de que la integral está bien hecha.

SEPTIEMBRE DE 2008. PROBLEMA C2.

Dada la función $f(x)=(1-x^2)\cdot\cos(\pi x)$, demuestra que existe $\alpha\in(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=-2$. Menciona los resultados teóricos que utilices. (3 Puntos)

Primero se deriva la función:

- $f'(x)=-2x\cdot\cos(\pi x)-\pi(1-x^2)\mathrm{sen}(\pi x)$
- $\mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$

A continuación se puede seguir uno de los siguientes métodos[1]:

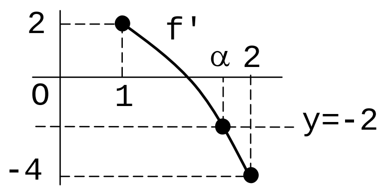
PRIMER MÉTODO:

Como la función f' satisface las condiciones de la propiedad de Darboux, existe α en $(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=-2$.

En efecto:

1ª) $f'(1)>-2>f'(2)$:

- $f'(1)=2>-2$
- $f'(2)=-4<-2$



2ª) f' es continua en $[1,2]$:

- $[1,2]\subset\mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$.
- Si $a\in[1,2]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}[-2x\cdot\cos(\pi x)-\pi(1-x^2)\mathrm{sen}(\pi x)]=$$

$$=-2a\cdot\cos(\pi a)-\pi(1-a^2)\mathrm{sen}(\pi a)=f'(a)$$

SEGUNDO MÉTODO:

Como la función[2] $g(x)=f'(x)+2$ satisface las condiciones del teorema de Bolxano, existe α en $(1,2)$ tal que $g(\alpha)=0$.

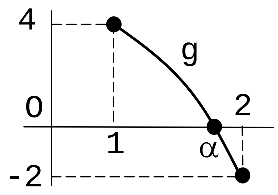
Ahora bien:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow f'(\alpha)+2=0 \Rightarrow f'(\alpha)=-2$$

En efecto:

1ª) $g(1)\cdot g(2)<0$:

- $g(1)=4>0$
- $g(2)=-2<0$



2ª) g es continua en $[1,2]$:

- $[1,2]\subset\mathrm{Dom}(g)=\mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$.
- Si $a\in[1,2]$:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}[-2x\cdot\cos(\pi x)-\pi(1-x^2)\mathrm{sen}(\pi x)+2]=$$

$$=-2a\cdot\cos(\pi a)-\pi(1-a^2)\mathrm{sen}(\pi a)+2=g(a)$$

---

[1] En este ejercicio no se puede aplicar fácilmente ni Lagrange ni Rolle, a no ser que haya una errata en el enunciado del problema. Por ejemplo, que $f'(\alpha)$ sea -3 o que el intervalo sea $(0,2)$.

[2] Si hay que probar que existe α tal que $f'(\alpha)=-2$, es decir, tal que $f'(\alpha)+2=0$, hay que considerar una función que se anule en $x=\alpha$. Esa función es $g(x)=f'(x)+2$.

Septiembre de 2008. Problema D1.

Halla los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}[\cos(2x)]^{1/\operatorname{sen} x^2} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1/2}\frac{1-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\cdot x)}{\ln(4x^2)}$$ (2 Puntos)

Primer límite:

$$\lim_{x\to 0}[\cos(2x)]^{1/\operatorname{sen} x^2} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x^2}\cdot[\cos(2x)-1]} \overset{2}{=}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{\operatorname{sen} x^2}} \overset{3}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x^2}} \overset{4}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\cdot\operatorname{sen}(2x)}{2x}} \overset{5}{=}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\cdot 2x}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(-2)} = e^{-2}$$

Segundo límite:

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}{\ln(4x^2)} \overset{4}{=} \lim_{x\to 1/2}\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]}{\frac{8x}{4x^2}} = \lim_{x\to 1/2}\left(-\frac{\pi x}{4}\cdot\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right]\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{8}\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{8}\cdot 2 = -\frac{\pi}{4}$$

---

1 Como sale la indeterminación 1^∞, aplicamos la fórmula del número e. También puede hacerse transformando esta función potencial-exponencial en una función exponencial.

2 El límite de una potencia es igual al límite de la base elevado al límite del exponente.

3 En x=0, $\operatorname{sen} x^2 \sim x^2$.

4 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.

5 En x=0, $\operatorname{sen}(2x)\sim 2x$.

SEPTIEMBRE DE 2008. PROBLEMA D2.

Halla los puntos en que se cortan las funciones $f(x)=x(x+2)$ y $g(x)=x3$, y calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas. (3 Puntos)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x(x+2) \\ y=x^3 \end{cases} \Rightarrow x^2+2x=x^3 \Rightarrow x^3-x^2-2x=0 \Rightarrow x(x^2-x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre -1 y 0 y entre 0 y 2 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
-1/2	-3/4	-1/8
1	3	1

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\cdot dx+\int_{0}^{2}(x^2+2x-x^3)\cdot dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{0}+\left(\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)_{0}^{2}=$$

$$=0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)+\left(\frac{8}{3}+4-4\right)-0=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$