SEPTIEMBRE DE 2009. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a-1)x+ay+2z=-1\\(a-1)x+2ay+3z=0\\(1-a)x+az=a^2+1\end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a-1&a&2&-1\\a-1&2a&3&0\\1-a&0&a&a^2+1\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a-1&a&2&-1\\0&a&1&1\\0&a&2+a&a^2\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a-1&a&2&-1\\0&a&1&1\\0&0&a+1&a^2-1\end{array}\right)\overset{3}{\rightarrow}\begin{cases}a-1=0\\a=0\\a+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\a=0\\a=-1\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-1&2&-1\\0&-1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}-2x-y+2z=-1\\-y+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x=-1+y-2z=-1-1+z-2z\\y=-1+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1+\alpha/2\\y=-1+\alpha\\z=\alpha\end{cases}$$

2º) Si a=0, el sistema es incompatible[4]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&2&-1\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&2&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&-2\end{array}\right)$$

3º) Si a=1, el sistema es incompatible[4]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&-1\\0&1&1&1\\0&0&2&0\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&-1\\0&0&-1&2\\0&0&2&0\end{array}\right)\overset{7}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&-1\\0&0&-1&2\\0&0&0&4\end{array}\right)$$

4º) Si $a\neq0$ y $a\neq\pm1$, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r}(a-1)x+ay+2z=-1\\ay+z=1\\(a+1)z=a^2-1\end{array}\right\}\overset{8}{\Rightarrow}z=\frac{a^2-1}{a+1}=\frac{(a-1)(a+1)}{a+1}=a-1\Rightarrow\boxed{z=a-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow ay=1-z=1-a+1=2-a\Rightarrow\boxed{y=\frac{2-a}{a}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a-1)x=-1-ay-2z=-1-a\cdot\frac{2-a}{a}-2(a-1)=-1-2+a-2a+2=-1-a\Rightarrow\boxed{x=\frac{1+a}{1-a}}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf+1ªf.

2 3ªf-2ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que hay que despejar.

4 Observa que hay que seguir aplicando Gauss hasta obtener un sistema escalonado.

5 3ªf-2ªf.

6 2ªf-1ªf.

7 3ªf+2·2ªf.

8 Como ya se han estudiado los casos en los que se anulan los coeficientes de las incógnitas que vamos a despejar ahora, podemos hacer esto tranquilamente.

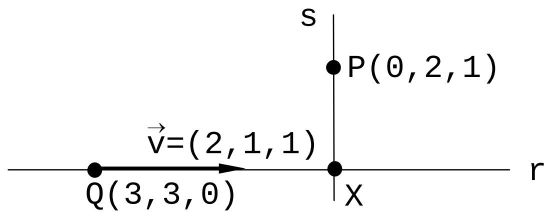
SEPTIEMBRE DE 2009. PROBLEMA A2.

Se considera la recta s que pasa por el punto P(0,2,1) y es perpendicular a la recta de ecuación $r\equiv\begin{cases}x-y-z=0\\x-4y+2z+9=0\end{cases}$. Encuentra el punto de corte de r y s. (2 PUNTOS)

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases}x-y-z=0\\x-4y+2z+9=0\end{cases}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\1&-4&2&-9\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&-3&3&-9\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&-1&1&-3\end{array}\right)\to$$

$$\to\begin{cases}x-y-z=0\\-y+z=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y+z=3+2z\\y=3+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3+2\alpha\\y=3+\alpha\\z=\alpha\end{cases}\to\begin{cases}Q(3,3,0)\\\vec{v}(2,1,1)\end{cases}$$



A continuación se puede seguir uno de los siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Como X es un punto de la recta r: $X(3+2\alpha,3+\alpha,\alpha)$.

Como las rectas r y s son perpendiculares:

$$[\overrightarrow{XP}]\perp\vec{v}\Rightarrow[\overrightarrow{XP}]\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(-3-2\alpha,-1-\alpha,1-\alpha)\cdot(2,1,1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6-4\alpha-1-\alpha+1-\alpha=0\Rightarrow 6\alpha=-6\Rightarrow\alpha=-1\Rightarrow X(1,2,-1)$$

SEGUNDO MÉTODO:

Hallamos la ecuación del plano que es perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P:

$$2x+y+z+D=0\Rightarrow 0+2+1+D=0\Rightarrow D=-3\Rightarrow 2x+y+z-3=0$$

Como $X(3+2\alpha,3+\alpha,\alpha)$ está en dicho plano, satisface su ecuación:

$$2(3+2\alpha)+3+\alpha+\alpha-3=0\Rightarrow 6+4\alpha+2\alpha=0\Rightarrow 6\alpha=-6\Rightarrow\alpha=-1\Rightarrow X(1,2,-1)$$

TERCER MÉTODO:

La proyección del vector $[\overrightarrow{QP}]=(-3,-1,1)$ sobre $\vec{v}=(2,1,1)$ es $[\overrightarrow{QX}]$:

$$[\overrightarrow{QX}]=\frac{[\overrightarrow{QP}]\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\vec{v}=\frac{-6-1+1}{4+1+1}\cdot(2,1,1)=-1\cdot(2,1,1)=(-2,-1,-1)$$

Por tanto, si X(x,y,z):

$$[\overrightarrow{QX}]=(-2,-1,-1)\Rightarrow(x-3,y-3,z)=(-2,-1,-1)\Rightarrow\begin{cases}x-3=-2\\y-3=-1\\z=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=-1\end{cases}$$

---

1 2ªf-1ªf.
2 2ªf·1/3.

CUARTO MÉTODO:

Si $X(3+2\alpha,3+\alpha,\alpha)$ es un punto cualquiera de la recta r:

$$d(P,X)=\sqrt{(3+2\alpha)^2+(1+\alpha)^2+(\alpha-1)^2}=$$
$$=\sqrt{9+4\alpha^2+12\alpha+1+\alpha^2+2\alpha+\alpha^2+1-2\alpha}=\sqrt{6\alpha^2+12\alpha+11}$$

De todos los puntos de la recta, buscamos aquel cuya distancia a P es mínima. Por tanto:

$$d=\sqrt{6\alpha^2+12\alpha+11} \Rightarrow D=d^2=6\alpha^2+12\alpha+11 \Rightarrow D'=12\alpha+12=0 \Rightarrow \alpha=-1$$

Ahora bien:

$$D''=12 \Rightarrow D''(-1)=12>0 \Rightarrow d \text{ tiene un mínimo en } \alpha=-1 \Rightarrow X(1,2,-1)$$

QUINTO MÉTODO:

Como X pertenece a la recta r: $X(3+2\alpha,3+\alpha,\alpha)$. Y como es el único punto de dicha recta tal que el triángulo PXQ es rectángulo, aplicamos el teorema Pitágoras:

$$PQ^2=PX^2+QX^2 \Rightarrow (3-0)^2+(3-2)^2+(0-1)^2=(3+2\alpha-0)^2+(3+\alpha-2)^2+(\alpha-1)^2+$$
$$+(3+2\alpha-3)^2+(3+\alpha-3)^2+(\alpha-0)^2 \Rightarrow 9+1+1=9+12\alpha+4\alpha^2+1+2\alpha+\alpha^2+\alpha^2-2\alpha+1+$$
$$+4\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2 \Rightarrow 11=12\alpha^2+12\alpha+11 \Rightarrow 12\alpha(\alpha+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0 \Rightarrow X(3,3,0)\\ \alpha=-1 \Rightarrow X(1,2,-1)\end{cases}$$

Como el primer punto es el punto Q[1], la solución es X(1,2,-1).

[1] Observa que el punto Q satisface la ecuación que planteamos, ya que $PQ^2=PQ^2+QQ^2$.

SEPTIEMBRE DE 2009. PROBLEMA B1.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, calcula rang(A·B) y rang(B·A). (2 PUNTOS)

RANGO DE A·B:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\overset{1}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\overset{2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rang}(A\cdot B)=1$$

RANGO DE B·A:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\overset{3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\overset{4}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\overset{5}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rang}(B\cdot A)=2$$

---

1 1ª f·1/2.
2 2ª f+1ª f.
3 2ª f+1ª f.
4 2ª f·1/3.
5 3ª f-2ª f.

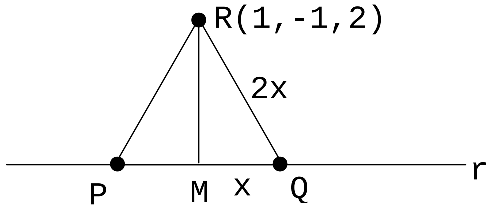
SEPTIEMBRE DE 2009. PROBLEMA B2.

Dado el punto R(1,-1,2), encuentra los puntos P y Q de la recta $r\equiv\begin{cases}x+y+z-4=0\\x+2y+2z-6=0\end{cases}$ tales que PQR sea un triángulo equilátero. (3 PUNTOS)

Hallamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases}x+y+z=4\\x+2y+2z=6\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\1&2&2&6\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\0&1&1&2\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}x+y+z=4\\y+z=2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=4-y-z=4-2+z-z=2\\y=2-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=2-\alpha\\z=\alpha\end{cases}$$



A continuación puede seguirse uno de los dos siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Para calcular el punto M, hallamos[2] primero la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto R:

$$-y+z+D=0\ \Rightarrow\ 1+2+D=0\ \Rightarrow\ D=-3\ \Rightarrow\ y-z+3=0$$

Como M está en la recta r: $M(2,2-\alpha,\alpha)$; y como pertenece al plano que acabamos de calcular, satisface su ecuación:

$$y-z+3=0\ \Rightarrow\ 2-\alpha-\alpha+3=0\ \Rightarrow\ 2\alpha=5\ \Rightarrow\ \alpha=5/2\ \Rightarrow\ M(2,-1/2,5/2)$$

Ahora bien, si X está en r: $X(2,2-\alpha,\alpha)$. Y si X es P o Q[3]:

$$d(X,R)=2\cdot d(X,M)\ \Rightarrow\ \sqrt{1+(3-\alpha)^2+(\alpha-2)^2}=2\cdot\sqrt{0+(5/2-\alpha)^2+(\alpha-5/2)^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1+9-6\alpha+\alpha^2+\alpha^2-4\alpha+4=4(25/4-5\alpha+\alpha^2+\alpha^2-5\alpha+25/4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\alpha^2-10\alpha+14=8\alpha^2-40\alpha+50\ \Rightarrow\ 6\alpha^2-30\alpha+36=0\ \Rightarrow\ \alpha^2-5\alpha+6=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \alpha=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha=3\ \Rightarrow\ P(2,-1,3)\\\alpha=2\ \Rightarrow\ Q(2,0,2)\end{cases}$$

---

[1] 2ªf-1ªf.

[2] En el problema A2 se explican otros métodos para calcular M.

[3] Como P y Q son los únicos puntos X de la recta que verifican que d(X,R)=2·d(X,M), ambos saldrán al resolver dicha ecuación.

SEGUNDO MÉTODO:

Calculamos la longitud del segmento RM, esto es, la distancia del punto R a la recta r:

$$RM=d(R,r)=\frac{|[\overrightarrow{SR}]\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{0+1+1}}=\frac{|-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1+1+1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Por Pitágoras, en el triángulo rectángulo RMQ:

$$RQ^2=RM^2+MQ^2 \Rightarrow 4x^2=3/2+x^2 \Rightarrow 3x^2=3/2 \Rightarrow x^2=1/2 \Rightarrow x=1/\sqrt{2} \Rightarrow RQ=2/\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

Si X es un punto de la recta r:

$$X(2,2-\alpha,\alpha)$$

Buscamos los puntos X de la recta r cuya distancia[1] a R es $\sqrt{2}$:

$$d(R,X)=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{1+(3-\alpha)^2+(\alpha-2)^2}=\sqrt{2} \Rightarrow 1+9-6\alpha+\alpha^2+\alpha^2-4\alpha+4=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2-10\alpha+12=0 \Rightarrow \alpha^2-5\alpha+6=0 \Rightarrow \alpha=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=3 \Rightarrow P(2,-1,3)\\ \alpha=2 \Rightarrow Q(2,0,2)\end{cases}$$

[1] También podría haberse elegido la propiedad $d(X,M)=1/\sqrt{2}$, pero, entonces, sería necesario calcular las coordenadas del punto M.

SEPTIEMBRE DE 2009. PROBLEMA C1.

Halla las integrales indefinidas:

$$\int \frac{2dx}{x^2-4} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$ (2 PUNTOS)

PRIMERA INTEGRAL:

Como se trata de una integral racional, calculamos las raíces del denominador:

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

Por tanto:

$$\frac{2}{x^2-4}=\frac{1}{(x+2)(x-2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}=\frac{A\cdot(x-2)+B\cdot(x+2)}{x^2-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2=A\cdot(x-2)+B(x+2) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=-2 \Rightarrow 2=-4A \Rightarrow A=-1/2 \\ \text{Si } x=2 \Rightarrow 2=4B \Rightarrow B=1/2 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{2dx}{x^2-4}=\int \frac{-1/2}{x+2}\cdot dx+\int \frac{1/2}{x-2}\cdot dx=-\frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{x+2}\cdot dx+\frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{x-2}\cdot dx \overset{1}{=}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot \ln|x+2|+\frac{1}{2}\cdot \ln|x-2|+C$$

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{2}\cdot \ln|x+2|+\frac{1}{2}\cdot \ln|x-2|\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}=\frac{-x+2+x+2}{2(x+2)(x-2)}=\frac{2}{x^2-4}$$

SEGUNDA INTEGRAL:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \overset{2}{=} \int \frac{2tdt}{1+t} \overset{3}{=} \int 2dt-2\cdot\int \frac{dt}{t+1}=2t-2\cdot \ln|t+1|+C \overset{4}{=}$$

$$=2\sqrt{x}-2\cdot \ln(\sqrt{x}+1)+C$$

$$\begin{array}{r|l} 2t & t+1 \\ \hline -2t-2 & 2 \\ \hline -2 & \end{array}$$

Comprobación:

$$[2\sqrt{x}-2\cdot \ln(\sqrt{x}+1)]'=\frac{2}{2\cdot\sqrt{x}}-2\cdot\frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1-1}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

---

1 Las dos integrales son casi inmediatas de tipo logarítmico.

2 Hacemos el cambio: $x=t^2 \Rightarrow dx=2t\cdot dt$.

3 Como se trata de un cociente de polinomios y el grado del numerador es igual que el del denominador, hacemos la división.

4 Deshacemos el cambio.

SEPTIEMBRE DE 2009. PROBLEMA C2.

Dada la función $f(x)=x^{\ln x}$, demuestra que existe $\alpha\in(1,e)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona los resultados teóricos que utilices. (3 PUNTOS)

Primero se deriva la función:

- $f(x)=x^{\ln x} \overset{1}{=} e^{\ln x\cdot\ln x}=e^{(\ln x)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=e^{(\ln x)^2}\cdot[(\ln x)^2]'=x^{\ln x}\cdot 2\cdot\ln x\cdot 1/x=\frac{2\cdot\ln x\cdot x^{\ln x}}{x}$$

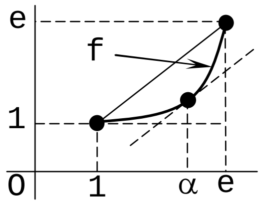
- $\mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)\overset{2}{=}(0,+\infty)$

A continuación se puede seguir uno de los siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange, existe α en $(1,e)$ tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=\frac{e^{\ln e}-1^{\ln 1}}{e-1}=\frac{e^1-1^0}{e-1}=\frac{e-1}{e-1}=1$$



En efecto:

1ª) f es continua en $[1,e]$ por ser derivable en $(0,+\infty)$.

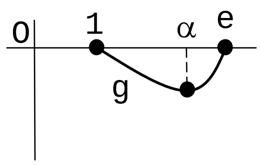
2ª) f es derivable en $(1,e)$ por serlo en $(0,+\infty)$.

SEGUNDO MÉTODO:

Como la función[3] $g(x)=f(x)-x$ satisface las condiciones del teorema de Rolle, existe α en $(1,e)$ tal que $g'(\alpha)=0$.

Ahora bien:

$$g'(\alpha)=0 \Rightarrow f'(\alpha)-1=0 \Rightarrow f'(\alpha)=1$$



En efecto

1ª) $g(1)=g(e)$:

- $g(1)=1^{\ln 1}-1=1^0-1=0$
- $g(e)=e^{\ln e}-e=e^1-e=0$

2ª) g es continua en $[1,e]$ por ser derivable en $(0,+\infty)$.

3ª) g es derivable en $(1,e)$ por serlo en $(0,+\infty)$.

---

[1] Como f es una función potencial-exponencial, puede escribirse como una función exponencial. Esto facilita el cálculo de su derivada, si no tienes que aplicar el método de derivación logarítmica.

[2] Si dejas f como te la dan, esto es, como una función potencial-exponencial, recuerda que su base debe ser positiva. Si la has escrito como una función exponencial, recuerda cuál es el dominio de la función ln.

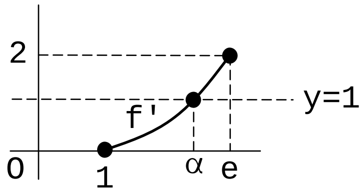
[3] Si hay que probar que existe α tal que $f'(\alpha)=1$, es decir, tal que $f'(\alpha)-1=0$, hay que considerar una función cuya derivada se anule en $x=\alpha$. Esa función es $g(x)=f(x)-x$.

TERCER MÉTODO:

Como la función f' satisface las condiciones de la propiedad de Darboux, existe α en (1,e) tal que $f'(\alpha)=1$.

En efecto:

1ª) $f'(1)<1<f'(e)$:



- $f'(1)=\dfrac{2\cdot \ln 1\cdot 1^{\ln 1}}{1}=0<1$
- $f'(e)=\dfrac{2\cdot \ln e\cdot e^{\ln e}}{e}=\dfrac{2e}{e}=2>1$

2ª) f' es continua en [1,e]:

- $[1,e]\subset Dom(f')=Dom(f)=(0,+\infty)$.
- Si $a\in[1,e]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{2\cdot \ln x\cdot x^{\ln x}}{x}=\frac{2\cdot \ln a\cdot a^{\ln a}}{a}=f'(a)$$

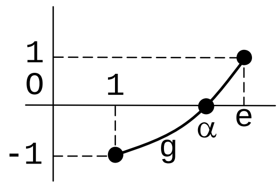
CUARTO MÉTODO:

Como la función[1] $g(x)=f'(x)-1$ satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en (1,e) tal que $g(\alpha)=0$. Ahora bien:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow f'(\alpha)-1=0 \Rightarrow f'(\alpha)=1$$

En efecto:

1ª) $g(1)\cdot g(e)<0$:



- $g(1)=\dfrac{2\cdot \ln 1\cdot 1^{\ln 1}}{1}-1=0-1=-1<0$
- $g(e)=\dfrac{2\cdot \ln e\cdot e^{\ln e}}{e}-1=\dfrac{2e}{e}-1=2-1=1>0$

2ª) g es continua en [1,e]:

- $[1,e]\subset Dom(g)=Dom(f')=Dom(f)=(0,+\infty)$.
- Si $a\in[1,e]$:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{2\cdot \ln x\cdot x^{\ln x}}{x}-1\right]=\frac{2\cdot \ln a\cdot a^{\ln a}}{a}-1=g(a)$$

Por Bolzano, existe α en (1,e) tal que $g(\alpha)=0$. Ahora bien:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow f'(\alpha)-1=0 \Rightarrow f'(\alpha)=1$$

[1] Si hay que probar que existe α tal que $f'(\alpha)=1$, es decir, tal que $f'(\alpha)-1=0$, hay que considerar una función que se anule en $x=\alpha$. Esa función es $g(x)=f'(x)-1$.

SEPTIEMBRE DE 2009. PROBLEMA D1.

Demuestra que la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x^{\cos(\pi x/2)}}$ se anula en algún punto del intervalo (1,3). Menciona los resultados teóricos que utilices. (2 PUNTOS)

Primero se deriva la función:

- $f(x)=\sqrt{x^{\cos(\pi x/2)}} \overset{1}{=} x^{\frac{\cos(\pi x/2)}{2}} = e^{\frac{\cos(\pi x/2)}{2}\cdot \ln x} = e^{\frac{1}{2}\cdot\cos(\pi x/2)\cdot\ln x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)= e^{\frac{1}{2}\cdot\cos(\pi x/2)\cdot\ln x}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)\cdot\ln x\right)' =$$

$$=\sqrt{x^{\cos(\pi x/2)}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)\cdot\ln x\right)' =$$

$$=\sqrt{x^{\cos(\pi x/2)}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\cdot \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot x)\cdot\ln x+\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2x}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)-\frac{\pi}{4}\cdot \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot x)\cdot\ln x\right)\cdot\sqrt{x^{\cos(\pi x/2)}}$$

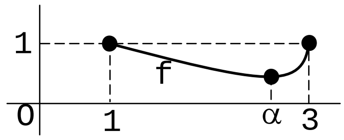
- $\mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)\overset{2}{=}(0,+\infty)$.

A continuación se puede seguir uno de los siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Rolle, existe α en (1,3) tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:



1ª) $f(1)=f(3)$:

- $f(1)=\sqrt{1^{\cos(\pi/2)}}=\sqrt{1^0}=1$
- $f(3)=\sqrt{3^{\cos(3\pi/2)}}=\sqrt{3^0}=1$

2ª) f es continua en [1,3] por ser derivable en $(0,+\infty)$.

3ª) f es derivable en (1,3) por serlo en $(0,+\infty)$.

---

[1] Como se trata de una función potencial-exponencial, se podría también derivar por el método de derivación logarítmica.

[2] Como f es una función potencial-exponencial, la base debe ser positiva: x>0.

SEGUNDO MÉTODO:

Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en el intervalo[1] (2,3) tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) $f'(2)\cdot f'(3)<0$:

- $f'(1)=\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\ln 1\right)\cdot\sqrt{1^{\cos(\pi/2)}}=0$
- $f'(2)=\left(\frac{1}{4}\cdot\cos\pi-\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\pi\cdot\ln 2\right)\cdot\sqrt{2^{\cos\pi}}=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2^{-1}}=-\frac{1}{4\cdot\sqrt{2}}\simeq-0,2<0$
- $f'(3)=\left(\frac{1}{6}\cdot\cos\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\cdot\ln 3\right)\cdot\sqrt{3^{\cos(3\pi/2)}}=\frac{\pi\cdot\ln 3}{4}\cdot\sqrt{3^{0}}=\frac{\pi\cdot\ln 3}{4}\simeq$

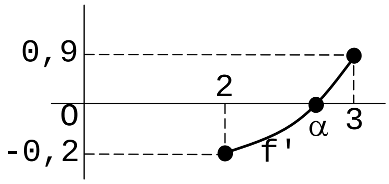
$$\simeq 0,9>0$$

2ª) f' es continua en [2,3]:

- $[2,3]\subset \mathrm{Dom}(f')=\mathrm{Dom}(f)=(0,+\infty)$.
- Si $a\in[2,3]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{1}{2x}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)-\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot x)\cdot\ln x\right)\cdot\sqrt{x^{\cos(\pi x/2)}}\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{2a}\cdot\cos(\frac{\pi}{2}\cdot a)-\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot a)\cdot\ln a\right)\cdot\sqrt{a^{\cos(\pi a/2)}}=f'(a)$$



[1] Y, por tanto, en el intervalo (1,3).

SEPTIEMBRE DE 2009. PROBLEMA D2.

Encuentra los tres puntos en que se cortan las funciones $f(x)=x$ y $g(x)=\text{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot x)$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas. (3 PUNTOS)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x \\ y=\text{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot x) \end{cases} \Rightarrow x=\text{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot x) \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre -1 y 0 y entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
-1/2	-1/2=-0,5	$-\sqrt{2}/2\simeq-0{,}7$
1/2	1/2=0,5	$\sqrt{2}/2\simeq0{,}7$

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-1}^{0}\left(x-\text{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot x)\right)\cdot dx+\int_{0}^{-1}\left(\text{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot x)-x\right)\cdot dx \overset{2}{=}$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)}{\pi/2}\right)_{-1}^{0}+\left(-\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)}{\pi/2}-\frac{x^2}{2}\right)_{0}^{1}=$$

$$=(0+2/\pi)-(1/2+0)+(0-1/2)-(-2/\pi-0)=\frac{4}{\pi}-1=\frac{4-\pi}{\pi}$$

---

1 Esta ecuación se resuelve a ojo.
2 Dos integrales son inmediatas y las otras dos de tipo coseno.