EXTRAORDINARIO DE 2010. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a^2+a)x+(2a+1)y+az=1\\(a^2+a)x+(3a+3)y+(a+1)z=2\\(a+2)y-az=a+2\end{cases}$$ (3 Puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a^2+a & 2a+1 & a & 1\\a^2+a & 3a+3 & a+1 & 2\\0 & a+2 & -a & a+2\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a^2+a & 2a+1 & a & 1\\0 & a+2 & 1 & 1\\0 & a+2 & -a & a+2\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{a^2+a} & 2a+1 & a & 1\\0 & \mathbf{a+2} & 1 & 1\\0 & 0 & \mathbf{-a-1} & a+1\end{array}\right)\overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow\begin{cases}a^2+a=0 \Rightarrow a(a+1) \Rightarrow a=0,\ a=-1\\a+2=0 \Rightarrow a=-2\\-a-1=0 \Rightarrow a=-1\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-2, el sistema es incompatible[4]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & -2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & -2 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)$$

2º) Si a=-1, el sistema es incompatible[4]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & -1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & -1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

3º) Si a=0, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 1\\0 & 2 & 1 & 1\\0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\overset{7}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}y=1\\z=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=1\\z=-1\end{cases}$$

4º) Si $a\neq-2$, $a\neq-1$ y $a\neq0$, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r}(a^2+a)x+(2a+1)y+az=1\\(a+2)y+z=1\\-(a+1)z=a+1\end{array}\right\}\Rightarrow z=\frac{a+1}{-(a+1)}=-1\Rightarrow\boxed{z=-1}\Rightarrow(a+2)y=1-z=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{y=\frac{2}{a+2}}\Rightarrow a(a+1)x=1-(2a+1)y-az=1-\frac{4a+2}{a+2}+a=\frac{a+2-4a-2+a^2+2a}{a+2}=\frac{a^2-a}{a+2}=$$

$$=\frac{a(a-1)}{a+2}\Rightarrow x=\frac{a(a-1)}{a(a+1)(a+2)}=\frac{a-1}{(a+1)(a+2)}\Rightarrow\boxed{x=\frac{a-1}{a^2+3a+2}}$$

---

1 2ªf-1ªf.

2 3ªf-2ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.

4 Observa que hay que seguir aplicando Gauss hasta obtener un sistema escalonado.

5 2ªf+1ªf.

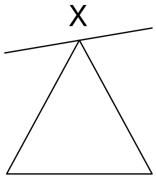
6 2ªf-2·1ªf.

7 3ªf+2ªf.

Dados los puntos P(2,1,1) y Q(1,2,-1), encuentra los puntos R y S de la recta r que cumplen que PQR y PQS son triángulos equiláteros:

$$r \equiv \frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{0}$$

(2 PUNTOS)



$$r \equiv \frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{0} \Rightarrow \begin{cases} x=-2+\alpha \\ y=-2+\alpha \\ z=0 \end{cases}$$

La longitud de los lados de los triángulos equiláteros es:

$$d(P,Q)=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

Si X es un punto de la recta r:

$$X(-2+\alpha,-2+\alpha,0)$$

Buscamos, pues, puntos X de la recta r tales que:

$$d(X,P)=d(X,Q)=\sqrt{6}$$

Resolvamos la primera ecuación:

$$d(X,P)=d(X,Q) \Rightarrow \sqrt{(-4+\alpha)^2+(-3+\alpha)^2+(-1)^2}=\sqrt{(-3+\alpha)^2+(-4+\alpha)^2+(1)^2}$$

Como esta igualdad se verifica para cualquier valor de α, ello significa que los puntos de r equidistan[1] de P y Q. Por tanto, los puntos R y S saldrán de la otra igualdad:

$$d(X,P)=\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{(-4+\alpha)^2+(-3+\alpha)^2+(-1)^2}=\sqrt{6} \Rightarrow 16-8\alpha+\alpha^2+9-6\alpha+\alpha^2+1=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2-14\alpha+20=0 \Rightarrow \alpha^2-7\alpha+10=0 \Rightarrow \alpha=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=5 \Rightarrow R(3,3,0) \\ \alpha=2 \Rightarrow S(0,0,0) \end{cases}$$

[1] Es decir, que la recta r se encuentra en el plano mediador del segmento PQ, esto es, en el plano perpendicular a dicho segmento en su punto medio, que, como sabes, es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento. Más aún, en este caso, la recta r es una mediatriz del segmento PQ, ya que pasa por su punto medio, M(3/2,3/2,0).

Extraordinario de 2010. Problema A3.

Halla la derivada y su valor en el punto x=1 para cada una de las siguientes funciones:

$$f(x)=x^{(x+2^x)} \quad \text{y} \quad g(x)=\operatorname{arc\,tg}[\cos(\tfrac{\pi}{2}\cdot x)]$$ (2 Puntos)

Primera función:

$$f(x)=x^{(x+2^x)} \stackrel{1}{=} e^{(x+2^x)\cdot \ln x} \Rightarrow f'(x)=e^{(x+2^x)\cdot \ln x}\cdot[(x+2^x)\cdot \ln x]'=$$

$$=x^{(x+2^x)}\cdot[(1+2^x\cdot \ln 2)\ln x+(x+2^x)\cdot\frac{1}{x}]=x^{(x+2^x)}\cdot[\ln x+2^x\cdot \ln 2\cdot \ln x+1+\frac{2^x}{x}]$$

* * *

$$f'(1)=1^{(1+2^1)}\cdot[\ln 1+2^1\cdot \ln 2\cdot \ln 1+1+\frac{2^1}{1}]=1^3\cdot[0+2\cdot \ln 2\cdot 0+1+2]=3$$

Segunda función:

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg}\left(\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}\cdot x)}\cdot\left(\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)\right)'=$$

$$=\frac{1}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}\cdot x)}\cdot\left(-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot x)\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot x)}{1+\cos^2(\frac{\pi}{2}\cdot x)}$$

* * *

$$f'(1)=\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{1+\cos^2\frac{\pi}{2}}=\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot 1}{1+0}=-\frac{\pi}{2}$$

1 En lugar de convertir la función potencial-exponencial en exponencial, se puede derivar directamente aplicando el método de derivación logarítmica.

EXTRAORDINARIO DE 2010. PROBLEMA A4.

Dada la función $f(x)=\ln\left[3+x+\text{sen}\left(\frac{\pi x^3}{x^2+x+2}\right)\right]$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(-1,2)$ tal que $f(\alpha)=1$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 Puntos)

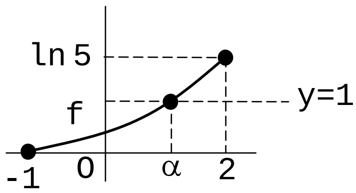
Se puede seguir uno de los dos siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Como la función f satisface las condiciones de la propiedad de Darboux, existe α en $(-1,2)$ tal que $f(\alpha)=1$.

En efecto

1ª) $f(-1)<1<f(2)$:



- $f(-1)=\ln\left[2+\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\ln 1=0<1$.
- $f(2)=\ln(5+\text{sen}\,\pi)=\ln 5\simeq 1,6>1$.

2ª) f es continua en $[-1,2]$:

- $[-1,2]\overset{1}{\subset}\text{Dom}(f)$.
- Si $a\in[-1,2]$:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\ln\left[3+x+\text{sen}\left(\frac{\pi x^3}{x^2+x+2}\right)\right]=\ln\left[3+a+\text{sen}\left(\frac{\pi a^3}{a^2+a+2}\right)\right]=f(a)$$

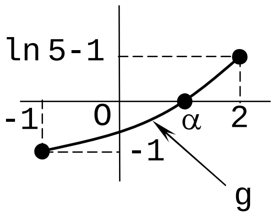
SEGUNDO MÉTODO:

Como la función[2] $g(x)=f(x)-1$ satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en $(-1,2)$ tal que $g(\alpha)=0$. Ahora bien:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow f(\alpha)-1=0 \Rightarrow f(\alpha)=1$$

En efecto:

1ª) $g(-1)\cdot g(2)<0$:



- $g(-1)=\ln\left[2+\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]-1=\ln 1-1=-1<0$.
- $g(2)=\ln(5+\text{sen}\,\pi)-1=\ln 5-1\simeq 0,6>0$.

2ª) g es continua en $[-1,2]$:

- $[-1,2]\overset{1}{\subset}\text{Dom}(g)=\text{Dom}(f)$.
- Si $a\in[-1,2]$:

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}\left(\ln\left[3+x+\text{sen}\left(\frac{\pi x^3}{x^2+x+2}\right)\right]-1\right)=\ln\left[3+a+\text{sen}\left(\frac{\pi a^3}{a^2+a+2}\right)\right]-1=g(a)$$

---

[1] La demostración de esta inclusión está en la nota al final del problema.

[2] Si hay que probar que existe α tal que $f(\alpha)=1$, es decir, tal que $f(\alpha)-1=0$, hay que considerar una función que se anule en $x=\alpha$. Esa función es $g(x)=f(x)-1$.

NOTA:

$$x^2+x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} \Rightarrow x^2+x+2\neq 0$$

$$-1\leq x\leq 2 \overset{1}{\Rightarrow} 2\leq 3+x\leq 5 \overset{2}{\Rightarrow} 1\leq 3+x+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^3}{x^2+x+2}\right)\leq 6,\ \text{ya que}\ -1\leq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^3}{x^2+x+2}\right)\leq 1$$

1 Sumo 3 a cada miembro de la desigualdad.

2 Sumo miembro a miembro esta desigualdad con la que aparece al final de esta línea.

EXTRAORDINARIO DE 2010. PROBLEMA B1.

Calcula el determinante de A·B y el de A+B, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

(2 PUNTOS)

PRIMER DETERMINANTE:

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}\overset{1}{=}2\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}\cdot 1\cdot(-3)\cdot 1=$$

$$=2\cdot 2\cdot(-3)=-12$$

También puede hacerse del siguiente modo:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 4 & -2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A\cdot B|=\begin{vmatrix}0 & -3 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 4 & -2 & -2\end{vmatrix}=-12+24-12-12=-12$$

SEGUNDO DETERMINANTE:

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A+B|=\begin{vmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}\overset{2}{=}-1\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-1\cdot(-4)=4$$

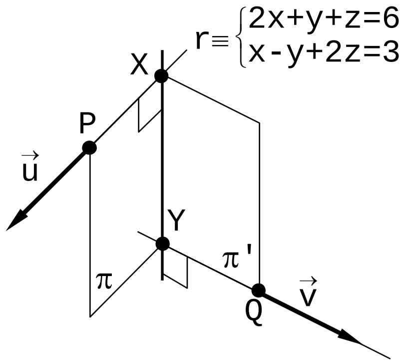
[1] El primer determinante lo desarrollamos por los elementos de la primera columna. El segundo determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal por tratarse de una matriz triangular.

[2] Desarrollamos el determinante por los elementos de la última fila.

EXTRAORDINARIO DE 2010. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}2x+y+z-6=0\\x-y+2z-3=0\end{cases}\quad y \quad s\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{4}$$ (3 PUNTOS)



$$s\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{4}\rightarrow\begin{cases}Q(-1,-2,-2)\\\vec{v}(2,1,4)\end{cases}$$

Calculamos primero las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases}x-y+2z=3\\2x+y+z=6\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&3\\2&1&1&6\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&3\\0&3&-3&0\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&3\\0&1&-1&0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}x-y+2z=3\\y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3+z-2z\\y=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3-\alpha\\y=\alpha\\z=\alpha\end{cases}\rightarrow\begin{cases}P(3,0,0)\\\vec{u}(-1,1,1)\end{cases}$$

A continuación puede seguirse uno de los dos siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

Por estar el punto X en la recta r: $X(3-\alpha,\alpha,\alpha)$.

Por estar el punto Y en s: $Y(-1+2\beta,-2+\beta,-2+4\beta)$.

Por tanto: $[\overrightarrow{XY}]=(-4+2\beta+\alpha,-2+\beta-\alpha,-2+4\beta-\alpha)$.

Como $[\overrightarrow{XY}]$ es perpendicular a $\vec{u}(-1,1,1)$ y a $\vec{v}(2,1,4)$:

$$\begin{cases}[\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{u}=0\\[\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{v}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4-2\beta-\alpha-2+\beta-\alpha-2+4\beta-\alpha=0\\-8+4\beta+2\alpha-2+\beta-\alpha-8+16\beta-4\alpha=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\alpha-3\beta=0\\3\alpha-21\beta=-18\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}3&-3&0\\3&-21&-18\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}3&-3&0\\0&-18&-18\end{array}\right)\overset{4}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&1&1\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=0\\\beta=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=1\end{cases}\overset{5}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}X(2,1,1)\\Y(1,-1,2)\end{cases}\Rightarrow[\overrightarrow{XY}]=(-1,-2,1)\Rightarrow XY\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

---

1 2ªf-2·1ªf.

2 2ªf·1/3.

3 2ªf-1ªf.

4 1ªf·1/3; 2ªf·(-1/18).

5 Si resultara que los puntos X e Y coinciden, eso significaría que las rectas r y s se cortan en dicho punto. En ese caso, la recta buscada pasa por ese punto y tiene por vector direccional el producto vectorial de los vectores direccionales de las rectas r y s.

SEGUNDO MÉTODO:

Como los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares a la recta que buscamos, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=(3,6,-3)=3(1,2,-1)$$

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -3(x-3)-3z=0 \Rightarrow -3x+9-3z=0 \Rightarrow x+z-3=0$$

Como el punto Y está en la recta s[1]: $Y(-1+2\beta,-2+\beta,-2+4\beta)$.

Como el punto Y está en el plano π, satisface su ecuación:

$$-1+2\beta-2+4\beta-3=0 \Rightarrow 6\beta=6 \Rightarrow \beta=1 \Rightarrow Y(1,-1,2)$$

Por tanto, la recta buscada es:

$$XY\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$$

[1] En lugar de lo que sigue, se podría calcular la ecuación del plano π'. La recta XY sería entonces la intersección de los planos π y π'.

EXTRAORDINARIO DE 2010. PROBLEMA B3.

Dada la función $f(x)=\operatorname{sen}(\pi 2^x)+\cos(\pi x)$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(-1,2)$ tal que $f'(\alpha)=1/3$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 Puntos)

Derivamos la función:

- $f'(x)=\pi\cdot 2^x\cdot \ln 2\cdot\cos(\pi 2^x)-\pi\cdot\operatorname{sen}(\pi x)$
- $\operatorname{Dom}(f')=\operatorname{Dom}(f)=\mathbb{R}$

A continuación se puede seguir uno de los siguientes métodos:

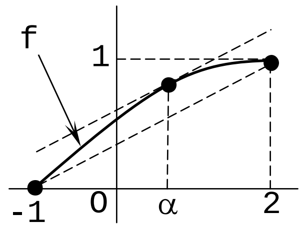
PRIMER MÉTODO:

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange, existe α en (-1,2) tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=$$

$$=\frac{[\operatorname{sen}(4\pi)+\cos(2\pi)]-[\operatorname{sen}(\pi/2)+\cos(-\pi)]}{3}=$$

$$=\frac{[0+1]-[1-1]}{3}=\frac{1-0}{3}=1/3$$



En efecto:

1ª) f es continua en [-1,2] por ser derivable en R.

2ª) f es derivable en (-1,2) por serlo en R.

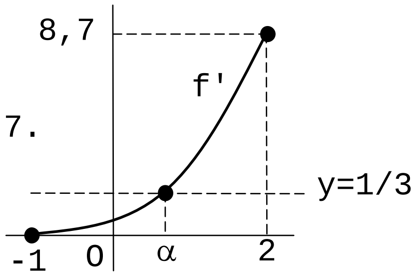
SEGUNDO MÉTODO:

Como la función f' satisface las condiciones de la propiedad de Darboux, existe α en (-1,2) tal que $f'(\alpha)=1/3$.

En efecto:

1ª) $f'(-1)<1/3<f'(2)$:

- $f'(-1)=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln 2\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\pi\cdot\operatorname{sen}(-\pi)=0$.
- $f'(2)=\pi\cdot 4\cdot\ln 2\cdot\cos(4\pi)-\pi\cdot\operatorname{sen}(2\pi)=4\pi\cdot\ln 2\simeq 8,7$.



2ª) f' es continua en [-1,2]:

- $[-1,2]\subset\operatorname{Dom}(f')=\operatorname{Dom}(f)=\mathbb{R}$.
- Si $a\in[-1,2]$:

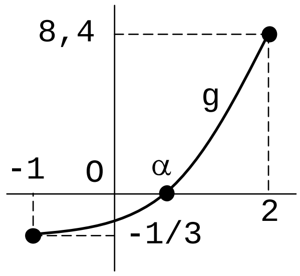
$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}[\pi\cdot 2^x\cdot\ln 2\cdot\cos(\pi 2^x)-\pi\cdot\operatorname{sen}(\pi x)]=$$

$$=\pi\cdot 2^a\cdot\ln 2\cdot\cos(\pi 2^a)-\pi\cdot\operatorname{sen}(\pi a)=f'(a)$$

TERCER MÉTODO:

Como la función[1] $g(x)=f'(x)-1/3$ satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en $(-1,2)$ tal que $g(\alpha)=0$. Ahora bien:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow f'(\alpha)-1/3=0 \Rightarrow f'(\alpha)=1/3$$



En efecto:

1ª) $g(-1)\cdot g(2)<0$:

- $g(-1)=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln 2\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\pi\cdot\text{sen}(-\pi)-1/3=-1/3<0$
- $g(2)=\pi\cdot 4\cdot\ln 2\cdot\cos(4\pi)-\pi\cdot\text{sen}(2\pi)-1/3=4\pi\cdot\ln 2-1/3\simeq 8{,}4>0$

2ª) g es continua en $[-1,2]$:

- $[-1,2]\subset\text{Dom}(g)=\text{Dom}(f')=\mathbb{R}$.
- Si $a\in[-1,2]$:

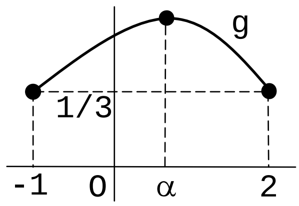
$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a}[\pi\cdot 2^x\cdot\ln 2\cdot\cos(\pi 2^x)-\pi\cdot\text{sen}(\pi x)-1/3]=$$

$$=\pi\cdot 2^a\cdot\ln 2\cdot\cos(\pi 2^a)-\pi\cdot\text{sen}(\pi a)-1/3=g(a)$$

CUARTO MÉTODO:

Como la función[2] $g(x)=f(x)-x/3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle, existe α en $(-1,2)$ tal que $g'(\alpha)=0$. Ahora bien:

$$g'(\alpha)=0 \Rightarrow f'(\alpha)-1/3=0 \Rightarrow f'(\alpha)=1/3$$



En efecto:

1ª) $g(-1)=g(2)$:

- $g(-1)=\text{sen}(\pi/2)+\cos(-\pi)+1/3=1/3$.
- $g(2)=\text{sen}(4\pi)+\cos(2\pi)-2/3=1/3$.

2ª) g es continua en $[-1,2]$ por ser derivable en $\mathbb{R}$.

3ª) g es derivable en $(-1,2)$ por serlo en $\mathbb{R}$.

---

[1] Si hay que probar que existe α tal que $f'(\alpha)=1/3$, es decir, tal que $f'(\alpha)-1/3=0$, hay que considerar una función que se anule para $x=\alpha$. Esa función es $g(x)=f'(x)-1/3$.

[2] Como $f'(\alpha)=1/3$, es decir, como $f'(\alpha)-1/3=0$, hay que trabajar con una función cuya derivada se anule en $x=\alpha$. Esa función es $g(x)=f(x)-x/3$.

EXTRAORDINARIO DE 2010. PROBLEMA B4.

Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-x$ y $g(x)=sen(\pi x)$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de f(x) y g(x). (3 Puntos)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^3-x \\ y=sen(\pi x) \end{cases} \Rightarrow x^3-x=sen(\pi x) \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre -1 y 0 y entre 0 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
-1/2	3/8	-1
1/2	-3/8	1

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-1}^{0}[x^3-x-sen(\pi x)]\cdot dx+\int_{0}^{1}[sen(\pi x)-x^3+x]\cdot dx \overset{2}{=}$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{cos(\pi x)}{\pi}\right)_{-1}^{0}+\left(-\frac{cos(\pi x)}{\pi}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)_{0}^{1}=$$

$$=\frac{1}{\pi}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right)+\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{4}=\frac{4}{\pi}+\frac{1}{2}$$

1 Esta ecuación se resuelve a ojo.

2 La integral de $sen(\pi x)$ es casi inmediata de tipo coseno.