EXTRAORDINARIO DE 2011. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} y+3z=1 \\ (a^2-a-2)x-y-3z=-1 \\ (a^2-a-2)x+(a^2-2a)z=2-a \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ a^2-a-2 & -1 & -3 & -1 \\ a^2-a-2 & 0 & a^2-2a & 2-a \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a^2-a-2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ a^2-a-2 & 0 & a^2-2a & 2-a \end{array}\right) \overset{2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} a^2-a-2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-2a+3 & 3-a \end{array}\right) \overset{3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a^2-a-2} & -1 & -3 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{a^2-2a} & 2-a \end{array}\right) \xrightarrow{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2-a-2=0 \Rightarrow a=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2} \Rightarrow a=2,\ a=-1 \\ a^2-2a=0 \Rightarrow a(a-2)=0 \Rightarrow a=0,\ a=2 \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} -y-3z=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-3z \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases}$$

2º) Si a=0, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

3º) Si a=2, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de dos parámetros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow -y-3z=-1 \Rightarrow y=1-3z \Rightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=1-3\beta \\ z=\beta \end{cases}$$

4º) Si a≠-1, a≠0 y a≠2, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} (a^2-a-2)x-y-3z=-1 \\ y+3z=1 \\ (a^2-2a)z=2-a \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{2-a}{a(a-2)}=\frac{-(a-2)}{a(a-2)} \Rightarrow \boxed{z=-\frac{1}{a}} \Rightarrow y=1-3z=1+\frac{3}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{a+3}{a}} \Rightarrow (a-2)(a+1)x=-1+y+3z=-1+\frac{a+3}{a}-\frac{3}{a}=\frac{-a+a+3-3}{a}=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

---

1 1ªf↔2ªf.
2 3ªf-1ªf.
3 3ªf-2ªf.
4 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.
5 2ªf+1ªf.

EXTRAORDINARIO DE 2011. PROBLEMA A2.

Encuentra la ecuación general del plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s:

$$r\equiv\begin{cases}3x+3y-2z-2=0\\x-y-2z=0\end{cases};\quad s\equiv\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{2}$$ (2 PUNTOS)

Puede seguirse uno de los dos métodos siguientes:

PRIMER MÉTODO:

Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases}3x+3y-2z=2\\x-y-2z=0\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&3&-2&2\\1&-1&-2&0\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&0\\3&3&-2&2\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&0\\0&6&4&2\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-2&0\\0&3&2&1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}x-y-2z=0\\3y+2z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y+2z=y+1-3y=1-2y\\2z=1-3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-2\alpha\\y=\alpha\\z=1/2-3\alpha/2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}P(1,0,1/2)\\\vec{u}(-2,1,-3/2)\end{cases}$$

Como $\vec{v}(1,2,2)$ es un vector direccional de la recta s, la ecuación del plano π es[4]:

$$\begin{vmatrix}x-1&y-0&z-1/2\\-4&2&-3\\1&2&2\end{vmatrix}=0\Rightarrow 10(x-1)+5y-10(z-1/2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-1)+y-2(z-1/2)=0\Rightarrow 2x-2+y-2z+1=0\Rightarrow 2x+y-2z-1=0$$

SEGUNDO MÉTODO:

Como el plano π contiene a la recta r, pertenece al haz de planos de arista r:

$$\alpha(3x+3y-2z-2)+\beta(x-y-2z)=0\overset{5}{\Rightarrow}(3\alpha+\beta)x+(3\alpha-\beta)y+(-2\alpha-2\beta)z-2\alpha=0$$

Como π y s son paralelos, el vector característico de π y el vector direccional de s son perpendiculares. Por tanto:

$$(3\alpha+\beta,3\alpha-\beta,-2\alpha-2\beta)\cdot(1,2,2)=0\Rightarrow 3\alpha+\beta+6\alpha-2\beta-4\alpha-4\beta=0\Rightarrow 5\alpha-5\beta=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\beta=\alpha\overset{6}{\Rightarrow}\pi\equiv4\alpha x+2\alpha y-4\alpha z-2\alpha=0\overset{7}{\Rightarrow}\pi\equiv2x+y-2z-1=0$$

---

1 $1^a f\leftrightarrow 2^a f$.

2 $2^a f-3\cdot 1^a f$.

3 $2^a f\cdot 1/2$.

4 Hemos multiplicado por dos al vector direccional de r para evitar fracciones.

5 Escribimos la ecuación del plano en su forma general para ver el aspecto de su vector característico.

6 Sustituimos β por α en la ecuación del haz.

7 Dividimos por 2α ($\alpha\neq0$, ya que α y β no pueden ser simultáneamente nulos).

Extraordinario de 2011. Problema A3.

Dada la función $f(x)=x^{\sqrt{x^2-4x+7}}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(1,3)$ tal que $f'(\alpha)=4$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 Puntos)

Aunque la función f es una función potencial-exponencial, puede escribirse como una función exponencial:

$$f(x)=x^{\sqrt{x^2-4x+7}}=e^{\sqrt{x^2-4x+7}\cdot\ln x}$$

Como la ecuación $x^2-4x+7=0$ no tiene solución, el polinomio x^2-4x+7 es siempre positivo[1]. Por tanto[2]: $Dom(f)=(0,+\infty)$.

Por otro lado:

$$f'(x)=e^{\sqrt{x^2-4x+7}\cdot\ln x}\cdot\left(\sqrt{x^2-4x+7}\cdot\ln x\right)'=$$

$$=x^{\sqrt{x^2-4x+7}}\cdot\left(\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+7}}\cdot\ln x+\sqrt{x^2-4x+7}\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

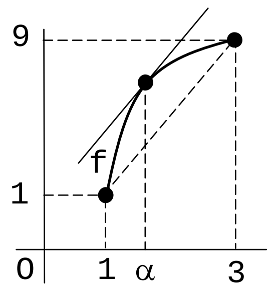
$$=x^{\sqrt{x^2-4x+7}}\cdot\left(\frac{(x-2)\cdot\ln x}{\sqrt{x^2-4x+7}}+\frac{\sqrt{x^2-4x+7}}{x}\right)$$

Evidentemente: $Dom(f')=(0,+\infty)$.

* * *

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange[3], existe α en (1,3) tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-1}{2}=\frac{8}{2}=4$$



En efecto:

1ª) f es continua en [1,3] por ser derivable en $(0,+\infty)$.

2ª) f es derivable en (1,3) por serlo en $(0,+\infty)$.

---

[1] Ya que al sustituir la x por un valor cualquiera sale positivo.

[2] Ya que solo existe el logaritmo de los números positivos. Si no modificas la función, como es una función potencial-exponencial, recuerda que la base debe ser necesariamente positiva.

[3] También podría hacerse el problema probando que la función f' cumple las condiciones de la propiedad de Darboux o que la función $g(x)=f'(x)-4$ cumple las del teorema de Bolzano o que la función $g(x)=f(x)-4x$ cumple las del teorema de Rolle.

EXTRAORDINARIO DE 2011. PROBLEMA A4.

Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de f y g.

(3 Puntos)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x) \end{cases} \Rightarrow x^2-1=\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x) \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

2º) Averiguamos entre -1 y 1 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	y_1	y_2
0	-1	1

3º) Calculamos el área:

$$A=\int_{-1}^{1}\left(\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)-x^2+1\right)\cdot dx=\int_{-1}^{1}\cos(\frac{\pi}{2}\cdot x)\cdot dx+\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cdot dx \overset{2}{=}$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}\cdot x)\right)_{-1}^{1}+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{1}=\left[\left(\frac{2}{\pi}\cdot 1\right)-\left(\frac{2}{\pi}\cdot(-1)\right)\right]+\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{\pi}+\frac{4}{3}=\frac{12+4\pi}{3\pi}$$

1 Esta ecuación se resuelve a ojo.

2 La primera integral es casi inmediata de tipo seno. La segunda integral es inmediata.

EXTRAORDINARIO DE 2011. PROBLEMA B1.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, calcula $|AB|$ y $|BA|$.

(2 puntos)

Como $|AB|=|A|\cdot|B|$ y $|BA|=|B|\cdot|A|$, ambos resultados coinciden.

Por tanto[1]:

$$|AB|=|BA|=|A|\cdot|B|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix} \overset{2}{=} 1\cdot(-1)\cdot2\cdot2\cdot1\cdot(-1)=4$$

[1] Otro modo de hacer el ejercicio consiste en calcular las matrices AB y BA y hallar luego sus determinantes, pero es más largo.

[2] El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

EXTRAORDINARIO DE 2011. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta r que corta perpendicularmente a la recta s sabiendo además que cada punto de la recta r equidista de los puntos P(-2,1,3) y Q(0,-1,1):

$$s\equiv\begin{cases}2x+y-z-2=0\\x+2y+z-4=0\end{cases}$$

(3 PUNTOS)

1º) Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta s:

$$\begin{cases}2x+y-z=2\\x+2y+z=4\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&2\\1&2&1&4\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&4\\2&1&-1&2\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&4\\0&-3&-3&-6\end{array}\right)\overset{3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&4\\0&1&1&2\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}x+2y+z=4\\y+z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4-2y-z=4-4+2z-z=z\\y=2-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=2-\alpha\\z=\alpha\end{cases}\rightarrow\begin{cases}R(0,2,0)\\\vec{u}(1,-1,1)\end{cases}$$

2º) Si X(x,y,z) es un punto de la recta r:

$$d(X,P)=d(X,Q)\Rightarrow\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2+(z-1)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-2y+1+z^2-6z+9=x^2+y^2+2y+1+z^2-2z+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-4y-4z+12=0\Rightarrow\pi\equiv x-y-z+3=0$$

Esto significa que los puntos de la recta r están en el plano[4] π.

3º) Sea Z el punto de corte de las dos rectas. Por estar en la recta s, $Z(\alpha,2-\alpha,\alpha)$; y por estar en r, pertenece al plano[5] π:

$$\alpha-2+\alpha-\alpha+3=0\Rightarrow\alpha=-1\Rightarrow Z(-1,3,-1)$$

4º) Como el vector direccional de la recta s, $\vec{u}(1,-1,1)$, y el vector característico del plano π, $\vec{v}(1,-1,-1)$, son ambos perpendiculares a la recta buscada, un vector direccional de ésta es:

$$\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{j}=2(\vec{i}+\vec{j})$$

Luego la ecuación continua de la recta buscada es:

$$r\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{0}$$

---

1 $1^a f\leftrightarrow 2^a f$.

2 $2^a f-2\cdot 1^a f$.

3 $2^a f\cdot(-1/3)$.

4 Este plano es el plano mediador del segmento PQ, esto es, el plano perpendicular al segmento en su punto medio. Su ecuación puede obtenerse también de este modo.

5 Dicho de otro modo, Y es la intersección de s y π.

EXTRAORDINARIO DE 2011. PROBLEMA B3.

Halla las integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \quad \text{y} \quad \int x^2 \cdot sen(2x) \cdot dx \qquad \text{(2 PUNTOS)}$$

PRIMERA INTEGRAL:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \overset{1}{=} \int \frac{2t \cdot dt}{t^2+t} = 2 \cdot \int \frac{t \cdot dt}{t(t+1)} = 2 \cdot \int \frac{1}{t+1} \cdot dt \overset{2}{=} 2 \cdot \ln|t+1|+C = 2 \cdot \ln|1+\sqrt{x}|+C$$

Comprobación:

$$(2 \cdot \ln|1+\sqrt{x}|)' = 2 \cdot \frac{(1+\sqrt{x})'}{1+\sqrt{x}} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (1+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}+x}$$

SEGUNDA INTEGRAL:

$$\int x^2 \cdot sen(2x) \cdot dx \overset{3}{=} -\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot sen(2x) + \frac{1}{4} \cdot cos(2x) + C$$

S	D	I
+	x^2	sen(2x)
-	2x	-cos(2x)/2
+	2	-sen(2x)/4
-	0	cos(2x)/8

Comprobación:

$$\left(-\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot sen(2x) + \frac{1}{4} \cdot cos(2x)\right)' =$$

$$= -x \cdot cos(2x) + x^2 \cdot sen(2x) + \frac{1}{2} \cdot sen(2x) + x \cdot cos(2x) - \frac{1}{2} \cdot sen(2x) = x^2 \cdot sen(2x)$$

1 Hacemos el cambio $x=t^2$, $dx=2t \cdot dt$.

2 Se trata de una integral casi inmediata de tipo logarítmico.

3 Esta integral se hace por partes. Las integrales efectuadas en la columna I son casi inmediatas de tipo seno y coseno. Se pueden simplificar estas integrales haciendo primero el cambio $2x=t$, $2 \cdot dx=dt$.

EXTRAORDINARIO DE 2011. PROBLEMA B4.

Calcula los extremos absolutos de la función $f(x)=\ln(x^2+x+1)-x$ en el intervalo [-1,2]. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 Puntos)

1º) Estudiamos la continuidad de la función en el intervalo:

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}-1=\frac{2x+1-x^2-x-1}{x^2+x+1}=\frac{x-x^2}{x^2+x+1}=\frac{x(1-x)}{x^2+x+1}\Rightarrow$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \text{Dom}(f')=\text{Dom}(f)=\mathbb{R} \Rightarrow f \text{ es continua en } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ es continua en } [-1,2]$$

Por el teorema de Weierstrass la función f alcanza en dicho intervalo sus extremos absolutos. Éstos se encuentran en los extremos del intervalo o entre sus extremos relativos.

2º) Calculamos los valores de f en los extremos del intervalo:

$$f(-1)=\ln 1+1=0+1=1$$

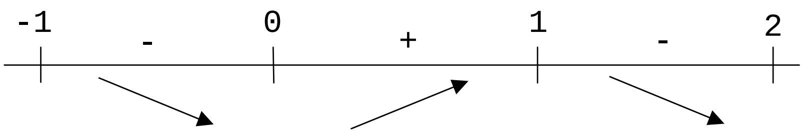
$$f(2)=\ln 7-2\simeq-0,054$$

3º) Hallamos los extremos relativos de la función en el intervalo:

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x(1-x)}{x^2+x+1}=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=1$$

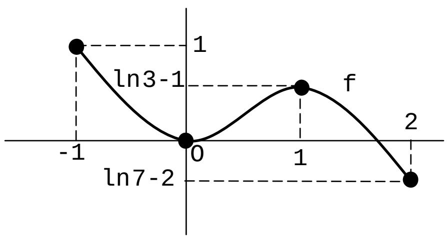
Estudiamos el signo de f' en el intervalo:



Como f es continua en x=0 y x=1, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera f tiene un mínimo relativo en x=0 que vale $y=f(0)=\ln 0-0=0$, y un máximo relativo en x=1 que vale $y=f(1)=\ln 3-1\simeq 0,0986$.

4º) Conclusión:

La función f tiene en x=-1 un máximo absoluto que vale y=1; y en x=2 un mínimo absoluto que vale $y=\ln 7-2$:



[1] Ya que la ecuación $x^2+x+1=0$ no tiene soluciones reales y $x^2+x+1>0$.