Extraordinario de 2012. Problema A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a-3)x-2z=2\\(a-3)x+(a-1)y-z=3\\(a-3)x+(a-1)y+(a+1)z=a^2-1\end{cases}$$ (3 Puntos)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & 0 & -2 & 2\\ a-3 & a-1 & -1 & 3\\ a-3 & a-1 & a+1 & a^2-1\end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & 0 & -2 & 2\\ 0 & a-1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & a+3 & a^2-3\end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{a-3} & 0 & -2 & 2\\ 0 & \mathbf{a-1} & 1 & 1\\ 0 & 0 & \mathbf{a+2} & a^2-4\end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a-3=0 \Rightarrow a=3\\ a-1=0 \Rightarrow a=1\\ a+2=0 \Rightarrow a=-2\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=-2, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & -2 & 2\\ 0 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \begin{cases}-5x-2z=2\\-3y+z=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-5x=2+2z\\-3y=1-z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2/5-2\alpha/5\\y=-1/3+\alpha/3\\z=\alpha\end{cases}$$

2º) Si a=1, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & -3\end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -6\end{array}\right)$$

3º) Si a=3, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 5\end{array}\right) \overset{5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \overset{6}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

4º) Si a≠-2, a≠1 y a≠3, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r}(a-3)x-2z=2\\(a-1)y+z=1\\(a+2)z=a^2-4\end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{(a+2)(a-2)}{a+2} \Rightarrow \boxed{z=a-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-1)y=1-z=1-(a-2)=3-a \Rightarrow \boxed{y=\frac{3-a}{a-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-3)x=2+2z=2+2(a-2)=-2+2a \Rightarrow \boxed{x=\frac{2a-2}{a-3}}$$

---

1 2ªf-1ªf; 3ªf-1ªf.

2 3ªf-2ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que tenemos que despejar.

4 3ªf-3·2ªf.

5 1ªf·1/2; 3ªf·1/5.

6 3ªf+1ªf.

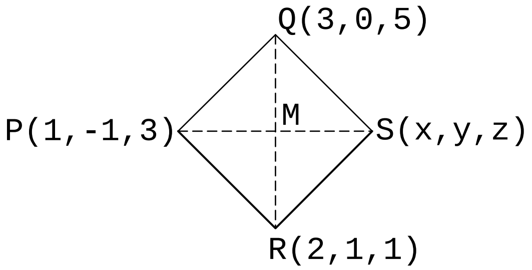
Los puntos P(1,-1,3), Q(3,0,5) y R(2,1,1) son tres vértices de un cuadrado. Encuentra el cuarto vértice. (2 PUNTOS)

Averiguamos la posición relativa de los vértices del cuadrado:

$$d(P,Q)=\sqrt{(1-3)^2+(-1-0)^2+(3-5)^2}=\sqrt{4+1+4}=3$$

$$d(Q,R)=\sqrt{(3-2)^2+(0-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{1+1+16}=3\cdot\sqrt{2}$$

$$d(P,R)=\sqrt{(1-2)^2+(-1-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+4+4}=3$$



A continuación puede seguirse uno de los siguientes métodos:

PRIMER MÉTODO:

$$[\overrightarrow{PQ}]=[\overrightarrow{RS}] \Rightarrow (2,1,2)=(x-2,y-1,z-1) \Rightarrow \begin{cases} 2=x-2 \\ 1=y-1 \\ 2=z-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

SEGUNDO MÉTODO:

$$[\overrightarrow{PS}]=[\overrightarrow{PQ}]+[\overrightarrow{PR}]= \Rightarrow (x-1,y+1,z-3)=(2,1,2)+(1,2,-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1,y+1,z-3)=(3,3,0) \Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ y+1=3 \\ z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

TERCER MÉTODO:

Si M es el centro del cuadrado, como es el punto medio del segmento QR, sus coordenadas son: M(5/2,1/2,3).

Como M es también el punto medio del segmento PS, se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{1+x}{2}=5/2 \\ \dfrac{-1+y}{2}=1/2 \\ \dfrac{3+z}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+x=5 \\ -1+y=1 \\ 3+z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

EXTRAORDINARIO DE 2012. PROBLEMA A3.

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x}{1-\cos(2x)} \quad y \quad \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x+1}$$ (2 PUNTOS)

PRIMER LÍMITE:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x}{1-\cos(2x)} \overset{1}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot tg\, x\cdot(1+tg^2 x)}{2\cdot sen(2x)} \overset{2}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} (1+tg^2 x)\cdot \lim_{x\to 0} \frac{tg\, x}{sen(2x)} = 1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1+tg^2 x}{2\cdot\cos(2x)} = \frac{1}{2}$$

* * *

Si se conocen los infinitésimos equivalentes, se puede proceder como sigue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg^2 x}{1-\cos(2x)} \overset{3}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2\cdot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

SEGUNDO LÍMITE:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x+1} \overset{4}{=} e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \left[(2x+1)\cdot\left(\frac{x+2}{x}-1\right)\right]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \left[(2x+1)\cdot\frac{x+2-x}{x}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4x+2}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \left(4+\frac{2}{x}\right)} = e^4$$

---

1 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.

2 El límite de un producto es el producto de los límites de los factores. La descomposición en dos límites, el primero de los cuales es determinado, simplifica la posterior aplicación de L'Hôpital al otro.

3 Ya que, en $x=0$, $tg\, x \sim x$; y como $2x$ es un infinitésimo en $x=0$, $1-\cos(2x) \sim (2x)^2/2 = 4x^2/2 = 2x^2$.

4 Como sale la indeterminación $1^{+\infty}$, podemos dar este paso.

EXTRAORDINARIO DE 2012. PROBLEMA A4.

Dada la siguiente función, demuestra que existe un valor $\alpha\in(-1,1)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso:

$$f(x)=\frac{(x^3-x+2)\cdot \ln\sqrt{e^{4x+7}}}{2x^4+x^2+1}$$ (3 Puntos)

Se trata de una función racional (cociente de polinomios):

$$f(x)=\frac{(x^3-x+2)\cdot \ln\sqrt{e^{4x+7}}}{2x^4+x^2+1}=\frac{(x^3-x+2)\cdot \ln(e^{(4x+7)/2})}{2x^4+x^2+1}=$$

$$=\frac{(x^3-x+2)\cdot\frac{4x+7}{2}\cdot \ln e}{2x^4+x^2+1}=\frac{(x^3-x+2)\cdot(4x+7)}{2\cdot(2x^4+x^2+1)}$$

Si $P(x)=(x^3-x+2)\cdot(4x+7)$ y $Q(x)=2\cdot(2x^4+x^2+1)$, entonces:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{P'(x)\cdot Q(x)-Q'(x)\cdot P(x)}{Q^2(x)}$$

Como Dom(P)=Dom(Q)=R y $Q\neq 0$ (ya que la ecuación $2x^4+x^2+1=0$ no tiene solución), entonces Dom(f)=R.

Como, además, Dom(P')=Dom(Q')=R (ya que son polinomios), también Dom(f')=R.

Por otro lado:

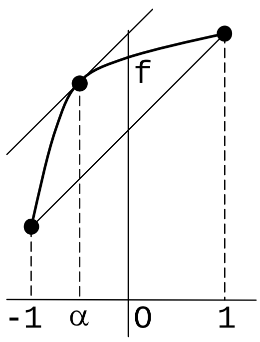
$$f(-1)=\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

$$f(1)=\frac{2\cdot 11}{2\cdot 4}=\frac{11}{4}$$

* * *

Como la función f satisface las condiciones del teorema de Lagrange, existe α en (-1,1) tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{11/4-3/4}{2}=\frac{2}{2}=1$$



En efecto:

1ª) f es continua en [-1,1] por ser derivable en R.

2ª) f es derivable en (-1,1) por serlo en R.

EXTRAORDINARIO DE 2012. PROBLEMA B1.

Calcula el determinante de $(A+B)^3$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&1&-1\\2&3&1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&3&2\\-1&0&2\end{pmatrix}$$ (2 puntos)

PRIMER MÉTODO:

Calculamos A+B:

$$A+B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&1&-1\\2&3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&3&2\\-1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\2&4&1\\1&3&3\end{pmatrix}$$

Hallamos |A+B|:

$$|A+B|=\begin{vmatrix}0&-1&0\\2&4&1\\1&3&3\end{vmatrix}=0+0-1-0-0+6=5$$

Como el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes de los factores:

$$\left|(A+B)^3\right|=|A+B|^3=5^3=125$$

SEGUNDO MÉTODO:

Si no conoces la propiedad utilizada en el método anterior, después de calcular A+B se procede como sigue:

$$(A+B)^3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\2&4&1\\1&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&0\\2&4&1\\1&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&0\\2&4&1\\1&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-4&-1\\9&17&7\\9&20&12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&0\\2&4&1\\1&3&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-9&-17&-7\\41&80&38\\52&107&56\end{pmatrix} \Rightarrow \left|(A+B)^3\right|=\begin{vmatrix}-9&-17&-7\\41&80&38\\52&107&56\end{vmatrix}=$$

$$=-40320-30709-33592+29120+36594+39032=125$$

Extraordinario de 2012. Problema B2.

Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x+2y-z-1=0$ y $\pi_2 \equiv x-2y+2z-3=0$, encuentra la ecuación general de los dos planos cuyos puntos equidistan de π_1 y π_2. (3 Puntos)

Primer método:

Sea $X(x,y,z)$ un punto de cualquiera de los dos planos que andamos buscando. Como equidista de los planos dados:

$$d(X,\pi_1)=d(X,\pi_2) \Rightarrow \frac{|2x+2y-z-1|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|x-2y+2z-3|}{\sqrt{1+4+4}} \Rightarrow$$

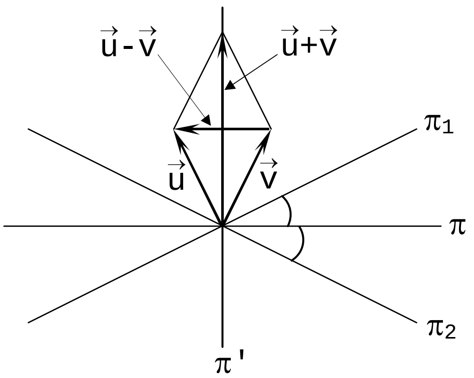
$$\Rightarrow |2x+2y-z-1|=|x-2y+2z-3| \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y-z-1=x-2y+2z-3 \\ 2x+2y-z-1=-x+2y-2z+3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4y-3z+2=0 \\ 3x+z-4=0 \end{cases}$$

Segundo método:

Evidentemente, los planos π y π' que andamos buscando (ver la siguiente figura) son los planos bisectores de los ángulos diedros que determinan π_1 y π_2.

Como $\vec{u}=(2,2,-1)$ y $\vec{v}=(1,-2,2)$ son los vectores característicos de los planos π_1 y π_2, respectivamente, y tienen el mismo módulo, entonces un vector característico del plano π es $\vec{u}+\vec{v}=(3,0,1)$ y su ecuación: $3x+z+D=0$. Del mismo modo, un vector característico del plano π' es $\vec{u}-\vec{v}=(1,4,-3)$ y su ecuación: $x+4y-3z+D'=0$.



Calculamos un punto de la recta que determinan los planos π_1 y π_2:

$$\begin{cases} x-2y+2z-3=0 \\ 2x+2y-z-1=0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x-2y+2z=3 \\ 6y-5z=-5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3+2y-2-12y/5 \\ z=1+6y/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2\alpha/5 \\ y=\alpha \\ z=1+6\alpha/5 \end{cases} \Rightarrow P(1,0,1)$$

Como P pertenece a los planos π y π', satisface sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+z+D=0 \\ x+4y-3z+D'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+1+D=0 \\ 1+0-3+D'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=-4 \\ D'=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+z-4=0 \\ x+4y-3z+2=0 \end{cases}$$

---

1 2ªf-2·1ªf.

TERCER MÉTODO:

Sea π uno cualquiera de los planos que buscamos.

Como pertenece al haz de planos de arista la recta que determinan π_1 y π_2, su ecuación es: $\alpha(x-2y+2z-3)+\beta(2x+2y-z-1)=0$; y su vector característico: $\vec{w}=(\alpha+2\beta,-2\alpha+2\beta,2\alpha-\beta)$.

Como $\vec{u}=(2,2,-1)$ y $\vec{v}=(1,-2,2)$ son los vectores característicos de los planos π_1 y π_2, respectivamente:

$$\cos(\pi,\pi_1)=\cos(\pi,\pi_2) \Rightarrow \frac{|\vec{u}\cdot\vec{w}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} \overset{1}{\Rightarrow} |\vec{u}\cdot\vec{w}| = |\vec{v}\cdot\vec{w}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2(\alpha+2\beta)+2(-2\alpha+2\beta)-1(2\alpha-\beta)|=|1(\alpha+2\beta)-2(-2\alpha+2\beta)+2(2\alpha-\beta)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |12\alpha+4\beta-4\alpha+4\beta-2\alpha+\beta|=|\alpha+2\beta+4\alpha-4\beta+4\alpha-2\beta| \Rightarrow |-4\alpha+9\beta|=|9\alpha-4\beta| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-4\alpha+9\beta=9\alpha-4\beta\\-4\alpha+9\beta=-9\alpha+4\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}13\alpha=13\beta\\5\alpha=-5\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\beta\\\alpha=-\beta\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha(x-2y+2z-3)+\alpha(2x+2y-z-1)=0\\\alpha(x-2y+2z-3)-\alpha(2x+2y-z-1)=0\end{cases} \overset{2}{\Rightarrow} \begin{cases}x-2y+2z-3+2x+2y-z-1=0\\x-2y+2z-3-2x-2y+z+1=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3x+z-4=0\\x+4y-3z+2=0\end{cases}$$

---

[1] Ya que los denominadores coinciden al tener el mismo módulo los vectores característicos de los planos dados.

[2] Como $\alpha\neq 0$, dividimos por α. (Si α fuese cero, β también, lo que carece de sentido.)

EXTRAORDINARIO DE 2012. PROBLEMA B3.

Dada la función $f(x)=(1-x)\cdot\cos(\pi x^3)$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(0,1)$ tal que $f'(\alpha)=1/2$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 PUNTOS)

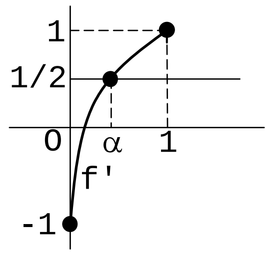
Primero derivamos la función:

$$f(x)=(1-x)\cdot\cos(\pi x^3) \Rightarrow f'(x)=-\cos(\pi x^3)+3\pi x^2(x-1)\cdot\text{sen}(\pi x^3)$$

* * *

Como la función f' satisface las condiciones de la propiedad de Darboux[1], existe α en el intervalo abierto (0,1) tal que $f'(\alpha)=1/2$.

En efecto:



1ª) $f'(0)<1/2<f'(1)$:

- $f'(0)=-1+0=-1<1/2$.
- $f'(1)=1+0=1>1/2$.

2ª) f' es continua en [0,1]:

- $[0,1]\subset\text{Dom}(f')=\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$.
- Si $a\in[0,1]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\left[-\cos(\pi x^3)+3\pi x^2(x-1)\cdot\text{sen}(\pi x^3)\right]=$$

$$=-\cos(\pi a^3)+3\pi a^2(a-1)\cdot\text{sen}(\pi a^3)=f'(a)$$

[1] Se puede también aplicar el teorema de Bolzano a la función auxiliar $g(x)=f(x)-1/2$. Si lo intentas, verás que no puede aplicarse el teorema de Lagrange.

Extraordinario de 2012. Problema B4.

Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=3-x^2$, calcula el área de la región del semiplano $y\geq 0$ encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. (3 Puntos)

Como las funciones son pares, nos reduciremos a la parte positiva del eje de abscisas:

1º) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=3-x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2-1=3-x^2 \Rightarrow 2x^2=4 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

2º) Averiguamos entre $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ qué función está por encima y qué función está por debajo:

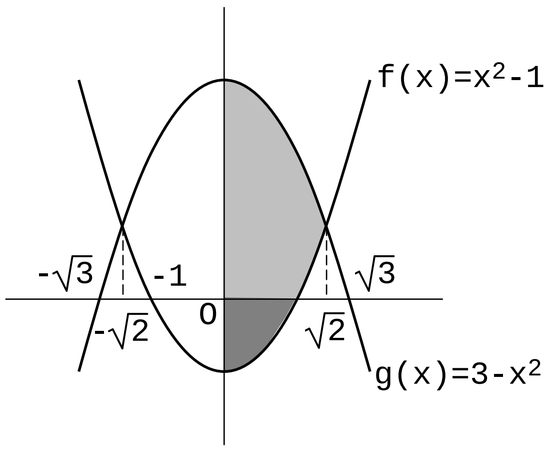
x	y_1	y_2
0	-1	3

3º) Calculamos el área:

$$\frac{A}{2} \overset{1}{=} \int_0^{\sqrt{2}}[3-x^2-x^2+1]\cdot dx-\int_0^1[0-x^2+1]\cdot dx = \int_0^{\sqrt{2}}[4-2x^2]\cdot dx-\int_0^1[1-x^2]\cdot dx =$$

$$=\left(4x-2\cdot\frac{x^3}{3}\right)_0^{\sqrt{2}}-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)_0^1=\left(4\sqrt{2}-2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)-\left(0-2\cdot\frac{0}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(0-\frac{0}{3}\right)=$$

$$=\frac{12\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}=\frac{8\sqrt{2}-2}{3} \Rightarrow A=\frac{16\sqrt{2}-4}{3}$$



[1] La primera integral es el área de la región situada a la derecha del eje de ordenadas limitada por las dos curvas (gris claro+gris oscuro). La segunda integral es el área de la parte de esa región que se encuentra debajo del eje de abscisas (gris oscuro), que, como se indica en el enunciado del problema, hay que restársela a la anterior.