21 de diciembre de 2000.[1]

1) Calcula:

$$\lim_{x \to 0} x^{\ln x}$$

2) Halla las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{5\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^{x}+7}{3^{2x}+1}$$

3) Prueba que la ecuación $5^x=8x-2$ tiene alguna raíz real. Encuentra un intervalo de amplitud menor que 0,25 donde esté dicha raíz.

4) Halla k para que las funciones $f(x)=k(1-\sqrt{x})$ y $g(x)=x-1$ sean infinitésimos equivalentes en x=1.

5) Calcula el valor de los parámetros a y b para que sea derivable en x=-1 la función:

$$f(x)=\begin{cases} a/x & \text{si } x\leq -1 \\ (x^2-b)/2 & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

6) Deriva y simplifica la función:

$$f(x)=x\cdot \operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\cdot \ln(1+x^2)$$

7) Halla la ecuación general de la recta tangente a la gráfica de la función $y=x^{x+1}$ en el punto de abscisa 1.

8) Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una semicircunferencia de radio 1 m.

[1] Todos los ejercicios valen lo mismo.

Ejercicio 1: Calcula:

$$\lim_{x\to 0} x^{\ln x}$$

* * *

Solución:

$$\lim_{x\to 0} x^{\ln x} \overset{1}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\ln x} = 0^{-\infty} = +\infty$$

---

1 Ya que Dom(f)=(0,+∞).

Ejercicio 2: Halla las asíntotas de la función:

$$f(x)=\frac{5\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^{x}+7}{3^{2x}+1}$$

* * *

Solución:

1º) Dom(f)=R.

2º) Por tanto, la función no tiene asíntotas verticales.

3º) La recta y=7 es asíntota horizontal de f en $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{5\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^{x}+7}{3^{2x}+1}=\frac{5\cdot 3^{-\infty}-2\cdot 3^{-\infty}+7}{3^{-\infty}+1}=\frac{5\cdot 0-2\cdot 0+7}{0+1}=7$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{5\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^{x}+7}{3^{2x}+1}-7=\frac{5\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^{x}+7-7\cdot 3^{2x}-7}{3^{2x}+1}=\frac{-2\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^{x}}{3^{2x}+1}=\frac{-2\cdot 3^{x}(3^{x}+1)}{3^{2x}+1}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $-\infty$, ya que el numerador es negativo y el denominador positivo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

4º) La recta y=5 es asíntota horizontal de f en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^{x}+7}{3^{2x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{2x}\cdot\left(5-\frac{2}{3^{x}}+\frac{7}{3^{2x}}\right)}{3^{2x}\cdot\left(1+\frac{1}{3^{2x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{2}{3^{x}}+\frac{7}{3^{2x}}}{1+\frac{1}{3^{2x}}}=$$

$$=\frac{5-\frac{2}{+\infty}+\frac{7}{+\infty}}{1+\frac{1}{+\infty}}=\frac{5-0+0}{1+0}=5$$

Posición relativa:

$$f(x)-y=\frac{5\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^{x}+7}{3^{2x}+1}-5=\frac{5\cdot 3^{2x}-2\cdot 3^{x}+7-5\cdot 3^{2x}-5}{3^{2x}+1}=\frac{2-2\cdot 3^{x}}{3^{2x}+1}=\frac{2(1-3^{x})}{3^{2x}+1}$$

Por tanto, como la diferencia es negativa en $+\infty$, ya que el numerador es negativo[1] y el denominador positivo, la función se encuentra situada por debajo de la asíntota.

[1] Si $x>0$, entonces $3^{x}>1$.

Ejercicio 3: *Prueba que la ecuación $5^x=8x-2$ tiene alguna raíz real. Encuentra un intervalo de amplitud menor que 0,25 donde esté dicha raíz.*

* * *

Solución:

Consideramos la función $f(x)=5^x-8x+2$.

La función es continua en su dominio, ya que si $a\in\mathbb{R}$:[1]

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} [5^x-8x+2] = 5^a-8a+2 = f(a)$$

Como $f(0)=1+2=3>0$ y $f(1)=5-8+2=-1<0$, estudiamos el signo de la función en valores intermedios hasta dar con un intervalo de dos décimas de longitud en cuyos extremos la función tenga signos distintos:

x	0	1	0,5	0,7
y	+	-	+	-

Como f es continua en [0,5;0,7] y $f(0,5)\cdot f(0,7)<0$, por el teorema de Bolzano existe c en (0,5;0,7) tal que $f(c)=0$.

Ahora bien:

$$f(c)=0 \Rightarrow 5^c-8c+2=0 \Rightarrow 5^c=8c-2$$

En consecuencia, c es solución de la ecuación. Y como c pertenece al intervalo (0,5;0,7), éste es el intervalo pedido.

[1] También puede hacerse derivando.

Ejercicio 4: *Halla k para que $f(x)=k(1-\sqrt{x})$ y $g(x)=x-1$ sean infinitésimos equivalentes en x=1.*

* * *

Solución:

1º) f y g son infinitésimos en x=1:

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} [k(1-\sqrt{x})] = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x-1) = 0$

2º) Para que sean infinitésimos equivalentes el límite de su cociente debe ser 1. Para calcular este límite[1] hacemos el cambio de variable $x=t^2$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{k(1-\sqrt{x})}{x-1} = \lim_{t\to 1}\frac{k(1-t)}{t^2-1} = \lim_{t\to 1}\frac{-k(t-1)}{(t+1)(t-1)} = \lim_{t\to 1}\frac{-k}{t+1} = \frac{-k}{2} = 1 \Rightarrow k=-2$$

[1] También puede hacerse multiplicando numerador y denominador por $1+\sqrt{x}$. O descomponiendo el denominador en factores, $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$, y simplificando a continuación. O por L'Hôpital.

Ejercicio 5: *Calcula el valor de los parámetros a y b para que sea derivable en x=-1 la función:*

$$f(x)=\begin{cases} a/x & \text{si } x\le -1 \\ (x^2-b)/2 & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

* * *

Solución:

Si $x\neq -1$, la derivada de f es:

$$f'(x)=\begin{cases} -a/x^2 & \text{si } x<-1 \\ x & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

Si f es continua[1] en x=-1, entonces (1-b)/2=-a:

- $f(-1)=-a$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}(a/x)=-a$
- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}[(x^2-b)/2]=(1-b)/2$

Si f es derivable en x=-1, entonces a=1:

- $f'_-(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}(-a/x^2)=-a$
- $f'_+(1)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} x=-1$

Por tanto: $a=1 \Rightarrow (1-b)/2=-1 \Rightarrow 1-b=-2 \Rightarrow b=3.$

* * *

Otra forma de hacerlo es estudiar sólo la derivada:

- $$f'_-(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{\frac{a}{x}+a}{x+1}\overset{2}{=}\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{a+ax}{x(x+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{a(x+1)}{x(x+1)}=$$
$$=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{a}{x}=-a$$

- $$f'_+(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{\frac{x^2-b}{2}+a}{x+1}\overset{3}{=}\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{x^2-b+2a}{2(x+1)}=\frac{1-b+2a}{0^+}\overset{4}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow 1-b+2a=0 \Rightarrow f'_+(-1)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{x^2-b+2a}{2(x+1)}\overset{5}{=}\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{2x}{2}=-1$$

Por tanto, para que la función sea derivable, -a=-1. Llegamos así al mismo resultado que antes.

---

[1] Si f es derivable en x=-1, debe ser continua en dicho punto.
[2] Multiplicamos numerador y denominador por x.
[3] Multiplicamos numerador y denominador por 2.
[4] Si $1-b+2a\neq 0$, este límite sería infinito. Pero es finito, ya que la función es derivable en x=-1.
[5] Como 1-b+2a=0, sale la indeterminación 0/0; por tanto, aplicamos L'Hôpital. También puede sustituirse –b+2a por -1.

Ejercicio 6: *Deriva y simplifica la función:*

$$f(x)=x\cdot \operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\cdot \ln(1+x^2)$$

* * *

Solución:

$$f'(x)=\operatorname{arc\,tg} x+x\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x+\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x$$

Ejercicio 7: *Halla la ecuación general de la recta tangente a la gráfica de la función $y=x^{x+1}$ en el punto de abscisa 1.*

* * *

Solución:

1º) Calculamos la ordenada del punto de tangencia:

$$y(1)=1^{1+1}=1^2=1$$

2º) Para hallar la pendiente, derivamos la función:[1]

$$y=x^{x+1} \overset{2}{\Rightarrow} \ln y=(x+1)\cdot\ln x \Rightarrow \frac{y'}{y}=\ln x+(x+1)\cdot\frac{1}{x}=\frac{x\cdot\ln x+x+1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1+x+x\cdot\ln x}{x}\cdot x^{x+1}=(1+x+x\cdot\ln x)\cdot x^x$$

3º) Calculamos la pendiente en el punto de tangencia:

$$y'(1)=(1+1+\ln 1)\cdot 1^1=2$$

Resumiendo:

x	y	y'
1	1	2

4º) Por tanto, la ecuación general de la recta tangente es:

$$y-1=2\cdot(x-1) \Rightarrow y-1=2x-2 \Rightarrow 2x-y-1=0$$

[1] Por el método de derivación logarítmica. O también escribiéndola como una función exponencial de base e.

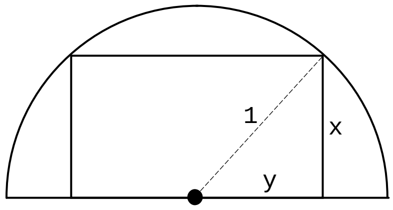
[2] Por las propiedades de los logaritmos.

Ejercicio 8: *Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una semicircunferencia de radio 1 m.*

* * *

Solución:

Sean x e y, respectivamente, las longitudes de la altura y de la mitad de la base del rectángulo inscrito:



El área del rectángulo tiene que ser máxima:

$$A=2xy$$

Tenemos que expresar el área en función de una sola variable:

$$1=x^2+y^2 \Rightarrow y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow A=2x\cdot\sqrt{1-x^2}$$

Como A>0, podemos sustituir esta función por su cuadrado:

$$C=4x^2\cdot(1-x^2)=4x^2-4x^4$$

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, derivamos, igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$C'=8x-16x^3=8x(1-2x^2)=0 \stackrel{1}{\Rightarrow} 2x^2=1 \Rightarrow x^2=1/2 \stackrel{1}{\Rightarrow} x=1/\sqrt{2}$$

Para aplicar el criterio de la derivada segunda,[2] derivamos de nuevo y calculamos el valor de la derivada segunda en $x=1/\sqrt{2}$:

$$C''=8-48x^2 \Rightarrow C''(1/\sqrt{2})=8-24<0 \Rightarrow A \text{ es máxima para } x=1/\sqrt{2}$$

Por último, si $x=1/\sqrt{2}$, entonces $y=1/\sqrt{2}$.

Se trata, pues, del rectángulo de base $2/\sqrt{2}$ m y altura $1/\sqrt{2}$ m.

---

[1] Ya que x>0.

[2] También puede aplicarse el criterio de la variación del signo de la derivada primera.